PAUL LESCOT

Un théorème de désintégration en analyse quasi-sûre

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 256-275
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__256_0>

UN THEOREME DE DESINTEGRATION EN ANALYSE QUASI-SURE

Paul L E S C O T

Université Paris VI
ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE
U.R.A. 213 du CNRS
Tour 45-46 5è étage — Boite 172
4, place Jussieu
75252 PARIS CEDEX 05

§ 0. INTRODUCTION. Soit (X,H,μ) l'espace de Wiener classique, et soit $g : X \to \mathbb{R}$ une application indéfiniment différentiable au sens du calcul des variations stochastiques ([5]) . L'objet de ce travail est d'étudier la désintégration de μ par g sous une hypothèse plus générale que la "non-dégénérescence" de [1]; plus précisément, nous obtiendrons le résultat suivant :

THÉORÈME A : Soit $g \in \mathbb{D}^{\infty}(X;\mathbb{R}^d)$ telle que $(\det g^*)(x) \neq 0$ sauf sur un ensemble mince, et soit $\nu = g_* \mu$ la mesure image de μ par g . Alors :

(i) $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$, où $k : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction semi-continue inférieurement

(ii) $k(\xi) < +\infty$ $d\xi$-presque sûrement en ξ .

(iii) Soit $O = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid k(\xi) > 0\}$; alors O est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = 0$ et, pour tout compact $K \subset O$, il existe $\delta > 0$ tel que $k(\xi) > \delta$ pour tout $\xi \in K$.

(iv) $\mathrm{supp}(\nu) = \bar{O}$.

(v) Il existe une application $\hat{\sigma}$ de O dans l'ensemble des mesures boréliennes sur X telle que, pour toute $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, toute $v \in \mathbb{D}^{\infty}(X;\mathbb{R})$ et toute redéfinition v^* de v, on ait :

$$\int_X u(g(x))\, v(x)\, d\mu(x) = \int_O u(\xi) \left(\int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) \right) d\xi$$

(vi) Pour tout $\xi \in O$, $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$.

(vii) Pour toute fonction $v \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$, $v \geq 0$, et toute redéfinition v^* de v , l'application $\xi \mapsto \int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)$ est semi-continue inférieurement de O dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Au passage nous obtenons le "principe de descente" :

THÉORÈME B : Soit B une partie mince de X ; alors, pour tout $\xi \in O$, B est $\hat{\sigma}(\xi)$-négligeable.

Ce Théorème généralise le résultat de [1] d'après lequel la mesure d'aire ne charge pas les ensembles minces.

L'existence d'un ξ tel que $\hat{\sigma}(\xi)$ soit de masse totale infinie est possible : nous donnons à la fin de cet article l'exemple d'une fonction g satisfaisant les hypothèses du Théorème A et telle que k prenne la valeur $+\infty$.

Nous commencerons par établir l'existence d'une densité indéfiniment différentiable pour des versions tronquées de la mesure ν, au moyen d'une technique d'intégration par parties qui s'inspirera de [6]; notre construction fera intervenir une fonction arbitraire ψ. Par la suite un théorème de SUGITA ([9]), récemment généralisé par KAZUMI et SHIGEKAWA ([3]), nous fournira une "bonne désintégration" pour ces mesures tronquées. Après en avoir déduit les propriétés voulues, nous ferons voir que les différents objets construits $(k, O, \hat{\sigma})$ ne dépendent pas de ψ.

Ichiro SHIGEKAWA a bien voulu me communiquer le preprint de [3] ; des conversations avec Johan van BIESEN ont été très suggestives. Qu'ils en soient ici remerciés.

§ 1. DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RÉSULTATS ADMIS.

Nous nous placerons dans le cadre de [1]; en particulier X sera l'espace de Wiener classique (espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ nulles en 0), H son sous-espace de Cameron-Martin et μ la mesure de Wiener sur X. $\mathbb{D}^{p,r}(X)$ et $\mathbb{D}^{\infty}(X)$ désigneront les analogues usuels sur X des classiques espaces de Sobolev. Pour $f \in \mathbb{D}^{p,r}(X)$, on posera $\|f\|_{p,r} = \|(I-\mathcal{L})^{r/2} f\|_{L^p(X)}$, où $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. [7]).

Pour tout ouvert O de X, on pose

$C_{p,r}(O) = \inf\{\|f\|^p_{p,r} \mid f \in \mathbb{D}^{p,r}(X)\ ,\ f \geq 0,\ f \geq 1\ \ \mu\text{-p.p. sur } O\}$; on prolonge $C_{p,r}$ à $\mathcal{P}(X)$ en posant $C_{p,r}(A) = \inf\{C_{p,r}(O) \mid O \text{ ouvert de } X \text{ et } A \subset O\}$ pour toute partie A de X. Un sous-ensemble Y de X sera dit <u>mince</u> si $C_{p,r}(Y) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et tout $r \in \mathbb{N}$.

On notera $\mathbb{D}^{q,-r}(X)$ le dual topologique de $\mathbb{D}^{p,r}(X)$ (q est l'exposant conjugué de p , i.e. tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) ; nous le munirons de sa norme naturelle :

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{q,-r}(X)} = \sup_{\substack{f\in\mathbb{D}^{p,r}(X)\\ \|f\|_{p,r}\le 1}} |F(f)| .$$

Soit $g\in\mathbb{D}^{\infty}(X)$; alors on peut trouver une suite décroissante d'ouverts de X, $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{D}^{\infty}(X)$ telles que :

(i) g_m est continue sur O_r^c , pour tous m et r .

(ii) Pour chaque r , la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur O_r^c vers la restriction à O_r^c d'une fonction $g^*\in\mathbb{D}^{\infty}(X)$.

(iii) $g_n\to g$ dans $\mathbb{D}^{\infty}(X)$.

(iv) $\lim_{n\to+\infty} c_{n,n}(O_n)=0$.

Dans ces conditions, on appelle g^* une redéfinition de g. Toute redéfinition de g est quasi-borélienne, et deux quelconques coïncident en dehors d'un ensemble mince. Si ρ est une mesure borélienne sur X ne chargeant pas les ensembles minces, l'expression $\int g^*(x)d\rho(x)$ est donc définie sans ambiguité, pour toute $g\in\mathbb{D}^{\infty}$.

Soient $p\ge 1$, $r\in\mathbb{N}$; en vertu des résultats de [4], il existe une application continue

δ : $\mathbb{D}^{p,r+1}(X)\longrightarrow\mathbb{D}^{p,r}(X)$ telle que :

$\forall f\in\mathbb{D}^{p,r+1}(X)$ $\forall g\in\mathbb{D}^{q,1}(X)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ $\int_X (f(x)|\nabla g(x))d\mu(x) = -\int_X \delta f(x).g(x)d\mu(x)$;

on l'appelle la divergence sur X .

D'après les inégalités de Meyer ([7]), la norme $\|\ \|_{p,r}$ est équivalente à la norme $\|f\|'_{p,r}=\sum_{j=0}^{r}\|\nabla^j f\|_{L^p(X;H^{\otimes j})}$; l'inégalité de Hölder implique alors la continuité de la multiplication de $\mathbb{D}^{p,r}(X)\times\mathbb{D}^{p',r}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p'',r}(X)$ dès que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{p''}$. En particulier la multiplication par un élément donné de $\mathbb{D}^{\infty}(X)$ est continue de $\mathbb{D}^{p,r}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p',r}(X)$ dès que $1\le p'<p$; nous ferons constamment usage de cette remarque au second paragraphe.

Pour tout espace topologique N , on notera $\mathscr{C}(N)$ (resp. $\mathscr{C}_b(N)$, $\mathscr{C}_c(N)$) l'espace des fonctions réelles continues sur N (resp. continues bornées, continues à support compact).

Un résultat classique d'analyse harmonique sera crucial :

LEMME 1.1 : Soit ν une mesure de Radon finie sur $\mathbb{R}^d$ telle qu'existe une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant

$$\left| \int \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \cdots \partial \xi_d^{\alpha_d}} \nu(d\xi) \right| \leq \mu_n \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}$$

pour tout entier n , tout multi-indice $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d = n$ et toute $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, ν possède une densité indéfiniment différentiable f par rapport à la mesure de Lebesgue $d\xi$ sur $\mathbb{R}$, et $\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_{k,d} \max(\mu_0,\ldots,\mu_{k+d+1})$ pour tout k , avec des $\lambda_{k,d}$ indépendants de ν .

Pour la démonstration, voir STROOCK ([9]), Lemma 3.1, p. 56.

§ 2. INTÉGRATION PAR PARTIES.

Dans toute la suite de cet article, nous fixerons $g = (g_1,\ldots,g_d) \in \mathbb{D}^\infty(X;\mathbb{R}^d)$ satisfaisant les hypothèses du Théorème A. On notera, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, $\sigma_{i,j}(x) = (\nabla g_i(x)|\nabla g_j(x))$, et $a(x) = \det(\sigma_{i,j}(x))_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq d}}$ (i.e. , avec les notations usuelles ([1]), $a(x) = (\det g)^2(x))$; $\{x \in X | a^*(x) = 0\}$ est donc mince par hypothèse. On notera $(H_{i,j}(x))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ la comatrice de $\sigma_{i,j}(x)$; chaque $H_{i,j}$ est un polynôme homogène de degré $n-1$ en les $\sigma_{i,j}$, d'où, par calcul symbolique, $H_{i,j} \in \mathbb{D}^\infty(X;\mathbb{R})$. En outre, si l'on définit $\gamma_{i,j}(x) = a(x)^{-1} H_{j,i}(x)$, il est bien connu que $\gamma(x)$ est l'inverse de $\sigma(x)$.

Nous allons établir le

THÉORÈME 2.1. : Soit $\varphi \in L^1(X)$, $\varphi \geq 0$ telle que pour tout $k \geq 0$, $\varphi_k = \frac{\varphi}{a^k} \in \mathbb{D}^\infty(X;\mathbb{R})$; alors, pour toute $f \in \mathbb{D}^{2,\infty}(X)$, $\nu_{\varphi,f} = g_*(\varphi f \mu)$ possède

<u>une densité</u> $\mathcal{C}^\infty$ $k_{\varphi,f}(\xi)$ <u>par rapport à la mesure de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}^d$, <u>et on a</u>

$$\| k_{\varphi,f} \|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)} \leq C(\varphi) \|f\|_{\mathbb{D}^{2,d+1}(X)} .$$

<u>Démonstration</u>. Posons, pour chaque $i \in \{1,\dots,d\}$:

$Z_i(x) = \sum_{j=1}^{d} H_{i,j}(x)\ \nabla g_j(x)$. Il est clair que $Z_i \in \mathbb{D}^\infty(X;H)$; en outre $(\nabla g_k(x) \mid Z_i(x)) = \delta_{ik}\ a(x)$ par définition même des $H_{i,j}$. Dans la terminologie du chapitre 3 de [6], Z_i n'est autre que le "canonical lift" à X du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ sur $\mathbb{R}^d$; plus précisément on a le

LEMME 2.2 : <u>Soit</u> $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$; <u>alors</u> :

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(g(x))a(x) = (\nabla (h \circ g)(x) \mid Z_i(x))$$

<u>pour tout</u> $i \in \{1,\dots,d\}$.

<u>Démonstration</u>. On a

$$\nabla(h \circ g)(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x))\ \nabla g_j(x) ,$$

d'où :

$$(\nabla(h \circ g)(x) \mid Z_i(x)) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x))\ (\nabla g_j(x) | Z_i(x)) = \sum_{j=1}^{d} a(x)\delta_{ij} \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x))$$
$$= a(x)\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(g(x)) . \quad \square$$

Nous allons maintenant définir, pour tout d-indice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et tout $k \in \mathbb{N}$, des opérateurs $R_{k,\alpha}$. Leur construction procède par récurrence sur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$:

on pose $R_{k,(0,\dots,0)}(f) = \varphi_k f$. Supposons ensuite $|\alpha| \geq 1$, et soit j le plus petit des indices i tels que $\alpha_i \neq 0$; écrivons $\alpha' = (0,0,\dots,0,\alpha_j-1,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n)$.

On a $|\alpha'| = |\alpha| - 1$, donc , par hypothèse de récurrence, les $R_{k,\alpha'}$ $(k \in \mathbb{N})$ sont définis.

Posons alors :

$$R_{k,\alpha}(f) = -(k+1)R_{k+2,\alpha'}(f)\ (\nabla a \mid Z_j) - a\ \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j) .$$

LEMME 2.3 : Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$, tout $r \in \mathbb{N}$, et tous $p > p' \geq 1$, $R_{k,\alpha}$ définit un opérateur continu de $\mathbb{D}^{p,r+|\alpha|}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p',r}(X)$.

Démonstration. Elle procède par récurrence sur $|\alpha|$.

Pour $|\alpha| = 0$, $R_{k,\alpha}$ n'est autre que la multiplication par φ_k , et la propriété résulte de la remarque faite au § 1 et de l'hypothèse $\varphi_k \in \mathbb{D}^\infty(X)$.

Supposons le résultat démontré pour $|\alpha| \leq n$, et soit α tel que $|\alpha| = n+1$; définissons α' comme ci-dessus, et fixons p'' et p''' de telle sorte que $p' < p'' < p''' < p$. On a $(\nabla a \mid Z_j) \in \mathbb{D}^\infty(X)$; or, par hypothèse de récurrence, $f \to R_{k+2,\alpha'}(f)$ est bien définie et continue de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p'',r+1}(X)$; $f \to (k+1)\,(\nabla a \mid Z_j) R_{k+2,\alpha'}(f)$ est donc continue de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p',r+1}(X)$, *a fortiori* de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p',r}(X)$.

En outre, $f \to R_{k+2,\alpha'}(f)$ est bien définie et continue de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p''',r+1}(X)$; $f \to R_{k+2,\alpha'}(f) Z_j$ est donc continue de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p'',r+1}(X;H)$. On peut dès lors utiliser la continuité de la divergence, en vertu de laquelle $f \longrightarrow \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j)$ est continue de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p'',r}(X)$, et donc $f \to a\,.\,\delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j)$ l'est de $\mathbb{D}^{p,r+n+1}(X)$ dans $\mathbb{D}^{p',r}(X)$ (car $a \in \mathbb{D}^\infty(X)$) . On a donc bien établi le résultat au rang $n+1$. □

LEMME 2.4 : Pour tout $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$, $R_{o,\alpha}$ définit un opérateur continu de $\mathbb{D}^{2,|\alpha|}(X)$ dans $L^1(X)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme 2.3 en prenant $p = 2$, $p' = 1$, $r = 0$, $k = 0$.

LEMME 2.5 : Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\mathbb{N}^+)^d$, toute $h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ et toute $f \in \mathbb{D}^{2,\infty}(X)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \cdots \partial \xi_d^{\alpha_d}} \, v_{\varphi,f}(d\xi) = \int_X h(g(x)) a(x)^k \, R_{k,\alpha}(f)(x) \, d\mu(x) \, .$$

Démonstration. Une fois de plus elle procède par récurrence sur $n = |\alpha|$, la propriété pour $n = 0$ résultant de la définition de $v_{\varphi,f}$.

Supposons la propriété établie au rang n ; on peut alors écrire :

$$\int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x)d\mu(x) = \int_X h(g(x))a(x)^k(-(k+1)R_{k+2,\alpha'}(f)(x)(\nabla a(x)|Z_j(x)) \ldots$$

$$-a(x)\ \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)\ Z_j)(x))d\mu(x) = -\int_X (h \circ g)(x)a(x)^{k+1}\ \delta(R_{k+2,\alpha'}(f)Z_j)(x)d\mu(x) \ldots$$

$$-(k+1)\int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha'}(f)(x)a(x)^k\ (\nabla a(x)|Z_j(x))d\mu(x)$$

$$= \int_X R_{k+2,\alpha'}(f)(x)(\nabla[(h \circ g)a^{k+1}](x)|Z_j(x))d\mu(x) \ldots$$

$$-(k+1)\int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha'}(f)(x)(\nabla a(x)|Z_j(x))a(x)^k\ d\mu(x)$$

où l'on a utilisé la définition de la divergence δ .

On peut donc écrire :

$$\int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x)d\mu(x) = \int_X R_{k+2,\alpha'}(f)(x)\ a(x)^{k+1}(\nabla(h \circ g)(x)|Z_j(x))d\mu(x)$$

$$+ (k+1)\int_X R_{k+2,\alpha'}(f)(x)a(x)^k(h \circ g)(x)(\nabla a(x)|Z_j(x))d\mu(x)$$

$$- (k+1)\int_X h(g(x))R_{k+2,\alpha'}(f)(x)(\nabla a(x)|Z_j(x))a(x)^k d\mu(x)$$

$$= \int_X R_{k+2,\alpha'}(f)(x)a(x)^{k+1}(\nabla(h \circ g)(x)|Z_j(x))d\mu(x) .$$

Le Lemme 2.2 permet d'égaler cette expression à :

$$\int_X \frac{\partial h}{\partial \xi_j}(g(x))a(x)^{k+2}R_{k+2,\alpha'}(f)(x)d\mu(x) .$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $\frac{\partial h}{\partial \xi_j}$ nous donne donc :

$$\int_X h(g(x))a(x)^k R_{k,\alpha}(f)(x)d\mu(x) = \int \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial \xi_1^{\alpha'_1} \ldots \partial \xi_\alpha^{\alpha'_d}} \left(\frac{\partial h}{\partial \xi_j}\right) v_{\varphi,f}(d\xi)$$

$$= \int \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_d^{\alpha_d}}(\xi)\ v_{\varphi,f}(d\xi) \text{ , q.e.d.}$$

Fin de la démonstration du Théorème A. Appliquons le Lemme 2.5 pour $k = 0$; on obtient :

$$\left|\int \frac{\partial^{|\alpha|}h}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_d^{\alpha_d}}(\xi)\ v_{\varphi,f}(d\xi)\right| = \left|\int_X h(g(x))R_{o,\alpha}(f)(x)\ d\mu(x)\right|$$

$$\leq \|h\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \int_X |R_{o,\alpha}(f)(x)|\ d\mu(x) = \|h\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)}\ \|R_{o,\alpha}(f)\|_{L^1(X)} \leq K(\alpha)\|f\|_{\mathbb{D}^{2,|\alpha|}(X)}\|h\|_{\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)}$$

en vertu du Lemme 2.4 ; il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.1 pour conclure. □

§ 3. CONSTRUCTION DE MESURES.

Soit φ satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1 ; on posera $k_\varphi = k_{\varphi,1}$ et $O_\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^d | k_\varphi(\xi) > 0\}$: il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

THÉORÈME 3.1 : Pour tout $\xi \in O_\varphi$ il existe une mesure borélienne de probabilité $\sigma^{\xi,\varphi}$ sur X telle que : $k_{\varphi,f}(\xi) = k_\varphi(\xi) \int_X f^*(x)\sigma^{\xi,\varphi}(dx)$ pour toute $f \in \mathbb{D}^\infty(X)$ et toute redéfinition f^* de f ; $\sigma^{\xi,\varphi}$ ne charge aucun ensemble $C_{2,d+1}$-négligeable (en particulier, aucun ensemble mince).

Démonstration. Considérons la forme linéaire

$$\mathbb{D}^{2,\infty}(X) \to \mathbb{R}$$

$$\lambda_{\varphi,\xi} : f \longmapsto \frac{k_{\varphi,f}(\xi)}{k_\varphi(\xi)} .$$

Il résulte du Théorème 2.1 que $|\lambda_{\varphi,\xi}(f)| \leq \frac{C(\varphi)}{k_\varphi(\xi)} \|f\|_{\mathbb{D}^{2,d+1}(X)}$ pour toute $f \in \mathbb{D}^\infty(X)$; par densité, on peut donc prolonger $\lambda_{\varphi,\xi}$ en une forme linéaire continue sur $\mathbb{D}^{2,d+1}(X)$: $\tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}$.

Soit $f \geq 0$, $f \in \mathbb{D}^{2,d+1}(X)$; on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{D}^{2,\infty}(X)$ telle que :

(i) $f_n \geq 0$ et (ii) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathbb{D}^{2,d+1}(X)$

(cela résulte par exemple de [3], Proposition 3.4) .

On a donc $\tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}(f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{\varphi,\xi}(f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_{\varphi,f_n}(\xi)}{k_\varphi(\xi)} \geq 0$.

$\tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}$ est donc une forme linéaire continue et positive sur $\mathbb{D}^{2,d+1}(X)$; les résultats des pages 422 et 423 de [3] entraînent l'existence d'une mesure borélienne $\sigma^{\xi,\varphi}$ sur X, ne chargeant pas les ensembles $C_{2,d+1}$-négligeables, et telle que $\tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}(f) = \int_X \tilde{f}(x)\, \sigma^{\xi,\varphi}(dx)$ pour toute $f \in \mathbb{D}^{2,d+1}(X)$ et toute <u>modification quasi-continue</u> $\tilde{f}$ de f. Mais, pour $f \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$, toute redéfinition f^* de f est une modification quasi-continue de f, d'où

$$\int_X f^*(x)\, \sigma^{\xi,\varphi}(dx) = \tilde{\lambda}_{\varphi,\xi}(f) = \lambda_{\varphi,\xi}(f) = \frac{k_{\varphi,f}(\xi)}{k_{\varphi}(\xi)}, \text{ soit :}$$

$$k_{\varphi,f}(\xi) = k_{\varphi}(\xi) \int_X f^*(x)\, \sigma^{\xi,\varphi}(dx). \qquad (*)$$

Il suffit alors de montrer que $\sigma^{\xi,\varphi}$ est de masse totale 1 ; pour cela, on prend $f = f^* = 1$ dans $(*)$. □

Nous allons appliquer le théorème 3.1 dans deux cas particuliers :

<u>Cas 1</u> : $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{a(x)}}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\varphi}{a^k} = f_k(a)$, où $f_k(x) = \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x}}$ $(x \geq 0)$. Le théorème de calcul symbolique ([5], p. 372) entraîne alors $\frac{\varphi}{a^k} \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les hypothèses du Théorème 3.1 sont donc satisfaites ; nous poserons dorénavant $\Omega = O_{\varphi}$ et $\sigma^{\xi,\varphi} = \sigma^{\xi}$ pour tout $\xi \in \Omega$. On notera ℓ la densité k_{φ}.

<u>Cas 2</u> : Fixons $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, croissante, et telle que $\psi(t) = 0$ pour $t \leq 1$ et $\psi(t) = 1$ pour $t \geq 2$ et posons $\varphi_n(x) = \psi(n\, a(x))$ $(x \in X,\ n \in \mathbb{N}^*)$.

Il est clair que les φ_n vérifient les conditions du Théorème 3.1 ; on a donc une suite de mesures $\sigma^{\xi,n} = \sigma^{\xi,\varphi_n}$, chacune étant définie pour $\xi \in O_n = O_{\varphi_n}$. On posera $O = \bigcup_{n \geq 1} O_n$ et on notera $k_n(\xi) = k_{\varphi_n}(\xi)$.

§ 4. CONSTRUCTION D'UNE VERSION S.C.I. DE LA DENSITÉ DE ν.

LEMME 4.1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $k_n(\xi) \leq k_{n+1}(\xi)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$; on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)(k_n(\xi) - k_{n+1}(\xi))d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{n+1}(\xi)d\xi$$

$$= \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x) - \int_X u(g(x))\varphi_{n+1}(x)d\mu(x)$$

$$= \int_X u(g(x))(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))d\mu(x) = \int_X u(g(x))(\psi(n\ a(x)) - \psi((n+1)a(x)))d\mu(x) \leq 0$$

(on a utilisé la définition des k_n et le caractère croissant de ψ). Cela vaut pour toute $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$; mais k_n et k_{n+1} sont des fonctions continues (car $\mathcal{C}^\infty$), d'où le résultat. □

LEMME 4.2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n \subset O_{n+1}$.

Démonstration. Par définition, $O_n = \{\xi \in \mathbb{R}^d | k_n(\xi) > 0\}$; il suffit alors d'appliquer le Lemme 4.1. □

Posons $k(\xi) = \lim_{n\to+\infty} k_n(\xi)$; en tant que limite croissante d'une suite de fonctions continues, $k = \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}_+$ est une fonction semi-continue inférieurement.

THÉORÈME 4.3 : $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$; alors :

$\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\nu(d\xi) = \int_X u(g(x))d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x)$ en vertu de la définition de ν et du théorème de convergence dominée $\left(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1\right.$ p.s. en x car tel sera le cas dès que $a(x)$ sera non nul; or $\{x \in X | a^*(x) \neq 0\}$ est mince, donc μ-négligeable et $a = a^*$ p.s.$\Big)$. On a donc $\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\nu(d\xi) = \lim_{n\to+\infty} \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x)$

$= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi$; mais $u(\xi)k_n(\xi)$ tend en croissant vers $u(\xi)k(\xi)$, d'où

$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_n(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k(\xi)d\xi$, soit $\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\ \nu(d\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\ k(\xi)d\xi$.

Cela vaut pour toute $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ positive, donc pour toute $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ en vertu de la décomposition $u = \frac{|u| + u}{2} - \frac{|u| - u}{2}$. On a donc $\nu(d\xi) = k(\xi)d\xi$. □

Remarque. L'alinéa (i) du Théorème A est ainsi établi.

(ii) résulte de ce que $\int_{\mathbb{R}} k(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} d\nu(\xi) = \nu(\mathbb{R}) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R})) = \mu(X) = 1$ donc $k(\xi)$ est fini $d\xi$-p.s.

§ 5. PROPRIÉTÉS DE k .

Il est clair que $k(\xi) \neq 0$ si et seulement si $k_n(\xi) \neq 0$ pour au moins un n . On a donc $\{ \xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) \neq 0 \} = \bigcup_{n \geq 1} O_n = O$.

LEMME 5.1 : $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = 0$.

Démonstration. Soit $F_n = \{ x \in X | a^*(x) \leq \frac{1}{n} \}$; les $(F_n)_{n \geq 1}$ forment une suite décroissante de parties mesurables de X , et on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \{ x \in X | a^*(x) = 0 \}$, donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ est mince , à fortiori de mesure nulle .

On peut écrire $\lim_{n \to +\infty} \mu(F_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n) = 0$.

Soit $x \in X \setminus F_n$; on a $a^*(x) > \frac{1}{n}$, d'où $2n\ a^*(x) > 2$ et $\varphi_{2n}^*(x) = \psi(2n\ a^*(x)) > 1$. On peut donc écrire :

$\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)) = \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap F_n) + \mu(g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap (X \setminus F_n))$

$\leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O) \cap (X \setminus F_n)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x) \leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x)$

$\leq \mu(F_n) + \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus O)} \varphi_{2n}(x) d\mu(x) = \mu(F_n) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus O} k_{2n}(\xi) d\xi = \mu(F_n)$ car k_{2n} est nulle sur $\mathbb{R}^d \setminus O \subset \mathbb{R}^d \setminus O_{2n}$.

On a donc $\nu(\mathbb{R}^d \setminus O) \leq \mu(F_n)$ pour tout $n \geq 1$; le résultat s'ensuit. □

LEMME 5.2 : <u>Soit</u> K <u>un compact contenu dans</u> O ; <u>alors il existe</u> $\delta > 0$ <u>tel que</u> $k(\xi) > \delta$ <u>pour tout</u> $\xi \in K$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$; alors $\{\xi | k(\xi) > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\xi | k_n(\xi) > \alpha\}$ est un ouvert (cette propriété n'est autre que la semi-continuité inférieure de k) .

Par hypothèse, K est contenu dans $O = \{\xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) > \frac{1}{n}\}$; par compacité on peut trouver m tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} \{\xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) > \frac{1}{n}\}$ d'où $k(\xi) > \frac{1}{m}$ pour tout $\xi \in K$. □

La clause (iii) du Théorème A résulte des Lemmes 5.1 et 5.2.

§ 6. DIVERSES PROPRIÉTÉS DE Ω ET DE $\mathrm{supp}(\nu)$.

LEMME 6.1 : $\mathrm{supp}(\nu) = \bar{O}$.

Démonstration. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ν-négligeable, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; on peut écrire :

$$0 \leq \int_A k_n(\xi)d\xi \leq \int_A k(\xi)d\xi = \nu(A) = 0 ,$$

d'où $\int_A k_n(\xi)d\xi = 0$. Mais A est ouvert et k_n continue positive, d'où $k_n(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in A$ (et pas seulement pour presque tout $\xi \in A$!) . Cela est vrai pour tout n , donc $k(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in A$.

Réciproquement, un ouvert sur lequel k est nulle en tout point est évidemment ν-négligeable ; le plus grand ouvert ν-négligeable est donc

$\overset{\circ}{\overbrace{\{\xi | k(\xi) = O\}}} = \overset{\circ}{\overbrace{(\mathbb{R}^d \setminus O)}} = \mathbb{R}^d \setminus \bar{O}$, c'est-à-dire que $\mathrm{supp}(\nu) = \bar{O}$. □

LEMME 6.2 : $k(\xi) \geq \ell(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. On peut supposer $\ell(\xi) > 0$, i.e. $\xi \in \Omega$. $k_n(\xi)$ est l'unique densité $\mathscr{C}^\infty$ de $g_*(\varphi_n \mu)$, i.e. de $g_*(\varphi_n e^{\frac{1}{a}} . e^{-\frac{1}{a}} \mu)$. Mais $\varphi_n . e^{\frac{1}{a}} \in \mathbb{D}^\infty(X)$ par calcul symbolique, d'où $k_n(\xi) = \ell(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) e^{\frac{1}{a^*(x)}} \sigma^\xi(dx)$.

On en tire $k_n(\xi) \geq \ell(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) \sigma^\xi(dx) = \ell(\xi) \int_X \psi(n\, a^*(x))\sigma^\xi(dx) (*)$. Comme ci-dessus on voit que $\lim_{n\to+\infty} \psi(n\, a^*(x)) = 1$ pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble mince (donc σ^ξ-négligeable) $\{y | a^*(y) = 0\}$; en outre $0 \leq \psi(n\, a^*(x)) \leq 1$ pour tout n et tout x . Le théorème de convergence dominée donne alors $\lim_{n\to+\infty} \int_X \psi(n\, a^*(x))\sigma^\xi(dx) = \int_X \sigma^\xi(dx) = 1$; en passant à la limite dans $(*)$ on obtient $k(\xi) \geq \ell(\xi)$. □

Remarque. Pour la première fois nous avons utilisé l'hypothèse $a^* \neq 0$ q.s. et pas seulement l'hypothèse plus faible $a \neq 0$ p.s.

LEMME 6.3 : $\Omega \subset O$.

Démonstration. Cela résulte du Lemme 6.2, de la définition de Ω ($= \{\xi \in \mathbb{R}^d | \ell(\xi) > 0\}$) et de celle de O ($= \{\xi \in \mathbb{R}^d | k(\xi) > 0\}$) . □

LEMME 6.4 : $\nu(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$.

Démonstration. On a :

$$\int_X \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega}(g(x))\, e^{-\frac{1}{a(x)}}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega}(\xi)\ell(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \ell(\xi)d\xi = 0 ;$$

on en déduit $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega}(g(x))e^{-\frac{1}{a(x)}} = 0$ μ-p.s. en x , soit $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega}(g(x)) = 0$ μ-p.s., i.e. $\nu(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$. □

COROLLAIRE 6.5 : $\mathrm{Supp}(\nu) = \bar{\Omega} = \bar{O}$.

Démonstration. $\nu(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) = 0$ d'après le Lemme 6.4 ; $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ est donc un ouvert ν-négligeable et $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{Supp}(\nu)$, soit $\mathrm{Supp}(\nu) \subset \bar{\Omega}$.

Mais $\mathrm{Supp}(\nu) = \bar{O}$ (Lemme 5.2) et $\bar{\Omega} \subset \bar{O}$ (Lemme 6.3), d'où le résultat : l'alinéa (iv) du Théorème est démontré. □

Il nous est maintenant possible d'éliminer l'ouvert Ω .

LEMME 6.6 : $\Omega = O$.

Démonstration. D'après le Lemme 6.3, $\Omega \subset O$; il suffit donc d'établir que $O \subset \Omega$. Soit $m \geq 1$; dès que $\varphi_m^*(x) \neq 0$ on a $a^*(x) > \frac{1}{m}$, d'où $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \leq e^m$ et $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x) \leq e^m \varphi_m^*(x) \leq e^m$.

On a donc $e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x) \leq e^m$ pour tout $x \in X$. Il en résulte, pour tout $\xi \in \Omega$:

$$k_m(\xi) = \ell(\xi) \int_X e^{\frac{1}{a^*(x)}} \varphi_m^*(x)\, d\mu(x) \leq \ell(\xi) \int_X e^m\, d\mu(x) = e^m\, \ell(\xi) \quad ,$$

soit $k_m(\xi) \leq e^m\, \ell(\xi)$. Par continuité cette inégalité reste vraie pour tout $\xi \in \bar{\Omega}$.

Soit maintenant $\xi_o \in O$; on a $\xi_o \in \bar{O} = \bar{\Omega}$, d'où $k_m(\xi_o) \leq e^m\, \ell(\xi_o)$ pour tout m . Mais $k(\xi_o) \neq 0$, donc $k_m(\xi_o) \neq 0$ pour un certain m et $\ell(\xi_o) \neq 0$, i.e. $\xi_o \in \Omega$. □

§ 7. CONSTRUCTION DE $\hat{\sigma}$ ET FORMULE DE DÉSINTÉGRATION.

Posons, pour tout $\xi \in O$:

$\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \ell(\xi) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^{\xi}(dx)$. Cette mesure est bien définie et ne charge aucun ensemble mince car tel est le cas de σ^{ξ} et car $\{x \in X \mid a^*(x) = 0\}$ est mince. Nous allons établir la formule de désintégration et l'égalité $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$.

THÉORÈME 7.1 : Soient $u \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$, $v \in \mathbb{D}^{\infty}(X)$. Alors

$$\int_X u(g(x))v(x)d\mu(x) = \int_O u(\xi) \left(\int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)\right) d\xi .$$

Démonstration. $|u(g(x))v(x)\varphi_n(x)| \leq \|u\|_{\infty} |v(x)|$; d'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_X u(g(x))v(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X u(g(x))v(x)\varphi_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{\varphi_n,v}(\xi)d\xi .$$

Observons alors que $k_{\varphi_n,v}(\xi)d\xi = g_*(\varphi_n v\mu)$ est absolument continue par rapport à $g_*\mu = \nu$, et donc ne charge pas $\mathbb{R}^d \setminus O$ en vertu du Lemme 5.1 . On peut donc écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)k_{\varphi_n,v}(\xi)d\xi = \int_O u(\xi)k_{\varphi_n,v}(\xi)d\xi = \int_O u(\xi)\ell(\xi)\left(\int_X \varphi_n^*(x)v^*(x)\exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^{\xi}(dx)\right)d\xi$$

$$= \int_O u(\xi)\left(\int_X v^*(x)\varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)\right)d\xi .$$

Si u et v sont ≥ 0 p.s., on a $v^* \geq 0$ q.s. (cf. [2], Lemme 3.2) soit $v^* \geq 0$ $\hat{\sigma}(\xi)$ - p.s. et $\lim_{n\to+\infty} \int_X v^*(x)\varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)$, d'où le résultat par convergence croissante. On se ramène à ce cas en écrivant

$u = \frac{|u| + u}{2} - \frac{|u| - u}{2}$ et $v = v_1 - v_2$ avec $v_i \in \mathbb{D}^{\infty}$, $v_i \geq 0$ (cela est possible d'après [9]) . □

Il nous reste à établir le

COROLLAIRE 7.2 : Pour tout $\xi \in \Omega$, $\hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$.

Démonstration.

$$\hat{\sigma}(\xi)(X) = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \lim_{n\to+\infty} \ell(\xi) \int_X \varphi_n^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^{\xi}(dx)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} k_n(\xi) = k(\xi) . \quad □$$

§ 8. ÉLIMINATION DE ψ :

Les objets $(k,O,\hat{\sigma})$ que nous venons de construire dépendent a priori du choix d'une fonction de troncature ψ effectué au § 3 ; en fait nous allons faire voir que ce choix est indifférent. Soient ψ_1, ψ_2 deux fonctions satisfaisant les conditions posées, et soient $O_1, k_1, \hat{\sigma}_1, k_{n,1}$ et $O_2, k_2, \hat{\sigma}_2, k_{n,2}$ associés respectivement à ces deux fonctions ψ_1 , ψ_2 par notre construction.

LEMME 8.1 : Pour tout entier n , $k_{n,1}(\xi) \leq k_{2n,2}(\xi)$.

Démonstration. Supposons $\psi_1(n\, a(x)) \neq 0$; on a $n\, a(x) \geq 1$, d'où $2\, n\, a(x) \geq 2$ et $\psi_2(2n\, a(x)) = 1$.

On en déduit $\psi_2(2n\, a(x)) \geq \psi_1(n\, a(x))$ pour tout $x \in X$, d'où

$\psi_2(2n\, a(x))d\mu(x) \geq \psi_1(n\, a(x))d\mu(x)$ et $g_*(\psi_2(2n\, a(x))d\mu(x)) \geq g_*(\psi_1(n\, a(x))d\mu(x))$.

Cela entraîne l'inégalité $k_{2n,2}(\xi) \geq k_{n,1}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, en vertu de la continuité de $k_{1,n}$ et $k_{2,n}$. □

LEMME 8.2 : $k_1 = k_2$.

Démonstration. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans le Lemme 8.1, on obtient $k_1(\xi) \leq k_2(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, l'argument étant symétrique, on a aussi $k_2(\xi) \leq k_1(\xi)$, d'où le résultat. □

LEMME 8.3 : $O_1 = O_2$.

Démonstration. Il suffit de tenir compte du Lemme 8.2 en se rappelant que $O_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^d | k_1(\xi) > 0\}$ et $O_2 = \{\xi \in \mathbb{R}^d | k_2(\xi) > 0\}$. □

L'unicité de $\hat{\sigma}$ requiert un argument moins élémentaire.

LEMME 8.4 : $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2$.

Démonstration. ℓ est définie de façon unique : c'est la densité continue de $g_*(e^{-\frac{1}{a}}\mu)$; il suffit donc de montrer que $\sigma_1 = \sigma_2$ (σ_i désigne la mesure notée

σ au paragraphe 3, construite au moyen de la fonction de troncature ψ_i). Par définition, pour toute $f \in \mathbb{D}^{2,\infty}(X;\mathbb{R})$ et toute modification quasi-continue $\tilde{f}$ de f , on a :

$$\int_X \tilde{f}(x)\sigma_1^{\xi}(dx) = \frac{e^{-\frac{1}{a}} f^{k(\xi)}}{\ell(\xi)} = \int_X \tilde{f}(x)\sigma_2^{\xi}(dx) \quad \text{pour tout}$$

$\xi \in O_1 = O_2$ (on s'est servi de l'unicité de la densité $\mathscr{C}^{\infty}$ de $g_*(e^{-\frac{1}{a}} f\, \mu)$). Mais $\mathbb{D}^{2,\infty}(X;\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{D}^{2,d+1}(X;\mathbb{R})$, d'où l'égalité

$\int_X \tilde{f}(x)\sigma_1^{\xi}(dx) = \int_X \tilde{f}(x)\sigma_2^{\xi}(dx)$ pour toute $f \in \mathbb{D}^{2,d+1}(X;\mathbb{R})$. Le théorème principal de KAZUMI et SHIGEKAWA ([3]) affirme l'unicité de la mesure associée à une forme linéaire positive sur $\mathbb{D}^{2,d+1}(X)$, et permet donc de conclure que $\sigma_1^{\xi} = \sigma_2^{\xi}$. □

§ 9. UN CONTRE-EXEMPLE.

Suivant une suggestion de P.MALLIAVIN, nous allons donner dans ce paragraphe un exemple de fonction $g \in \mathbb{D}^{\infty}(X;\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses du Théorème A et telle que k prenne la valeur $+\infty$. Il s'agit en réalité d'une application d'un espace $\mathbb{R}^2$ gaussien dans $\mathbb{R}$, ce qui nous montre qu'il ne s'agit pas d'un phénomène spécifique à la dimension infinie. Nous conservons les notations générales de l'article ; soit $(e_1,\dots,e_n,\dots)$ une base orthonormée de H contenue dans X^* ; nous définirons $g : X \to \mathbb{R}$ par $g(x) = (\langle e_1,x\rangle + \langle e_2,x\rangle)\, e^{-\langle e_2,x\rangle^2}$. Par calcul symbolique, il est clair que $g \in \mathbb{D}^{\infty}(X;\mathbb{R})$. De plus on a

$$\nabla g(x) = e^{-\langle e_2,x\rangle^2}(e_1+e_2) + (\langle e_1,x\rangle + \langle e_2,x\rangle)\,(\,-2\langle e_2,x\rangle\, e^{-\langle e_2,x\rangle^2}\,)\, e_2 \,,$$

d'où :

$$a(x) = (\nabla g(x)\,|\,\nabla g(x)) = e^{-2\langle e_2,x\rangle^2} + e^{-2\langle e_2,x\rangle^2}\,(\,1 - 2\langle e_2,x\rangle\langle e_1+e_2,x\rangle)^2 \geq e^{-2\langle e_2,x\rangle^2} > 0 :$$

les conditions du Théorème sont bien remplies, d'où la définition de $\hat{\sigma}$ et de k . Posons $\lambda_n(u, v) = \varphi_n(ue_1 + ve_2)$; il est clair que $0 \leq \lambda_n \leq 1$ et que λ_n tend vers 1 en croissant.

LEMME 9.1 : <u>Pour tout</u> $\xi \in \mathbb{R}^*$ <u>et tout</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>on a</u>

$$k_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(e^{\beta^2}.\xi - \beta, \beta)\, e^{\xi\beta e^{\beta} - \frac{1}{2}\xi^2 e^{2\beta^2}} d\beta .$$

<u>Démonstration</u>. Nous utiliserons le fait bien connu suivant : l'application de X dans $\mathbb{R}^2$ $x \mapsto (\langle x,e_1\rangle, \langle x,e_2\rangle)$ transforme μ en la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $u \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$; on a :

$$\int_{\mathbb{R}} u(\xi)k_n(\xi)d\xi = \int_X u(g(x))\varphi_n(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^2} u((\alpha+\beta)e^{-\beta^2})\lambda_n(\alpha,\beta)\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\alpha\, d\beta .$$

Posons $\gamma = (\alpha+\beta)e^{-\beta^2}$; cette intégrale devient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(\gamma)\, \lambda_n(e^{\beta^2}.\gamma-\beta,\beta)\, \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} e^{\beta^2} d\gamma\, d\beta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} u(\gamma)\, \lambda_n(e^{\beta^2}\gamma-\beta,\beta)\frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(\beta^2 - (e^{\beta^2}.\gamma-\beta)^2)} d\gamma\, d\beta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(\gamma)\, \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(e^{\beta^2}\gamma-\beta,\beta)\, e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta - e^{\beta^2}.\gamma)} d\beta\Big) d\gamma$$

Soit $\theta_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(e^{\beta^2}\gamma-\beta,\beta)\, e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta-\gamma e^{\beta^2})} d\beta$;

on a donc $k_n(\gamma) = \theta_n(\gamma)$ p.s. en γ.

De plus $\lambda_n(e^{\beta^2}\gamma-\beta,\beta) = \psi(n\, e^{-2\beta^2}(1 + (1-2\beta e^{\beta^2}\gamma)^2))$ d'où $|\lambda_n(e^{\beta^2}.\gamma-\beta,\beta)| \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$; pour $A \geq |\gamma| \geq \varepsilon$, on a

$$\frac{1}{2}\gamma\, e^{\beta^2}(2\beta-\gamma e^{\beta^2}) = \gamma\beta e^{\beta^2} - \frac{1}{2}\gamma^2 e^{2\beta^2} \leq A\beta e^{\beta^2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 e^{2\beta^2}$$

lequel équivaut, pour $|\beta|$ tendant vers $+\infty$, à $-\frac{1}{2}\varepsilon^2 e^{2\beta^2}$; l'intégrale qui définit θ_n converge donc normalement sur $[-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$ pour tous $A \geq \varepsilon > 0$, donc θ_n définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$. Il en résulte que $k_n = \theta_n$ sur $\mathbb{R}^*$. □

LEMME 9.2 : <u>Pour tout</u> $n \geq 2$, $k_n(0) \geq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}$.

<u>Démonstration</u>. Soit $|\beta| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}$; on a $e^{-2\beta^2} \geq \frac{2}{n}$, d'où $a(\alpha e_1 + \beta e_2) \geq \frac{2}{n}$ pour tout α et $\lambda_n(\alpha,\beta) = \psi(n\, a(\alpha e_1 + \beta e_2)) = 1$ pour tout α .

Pour tout $\gamma \neq 0$ on peut écrire

$$k_n(\gamma) = \theta_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n(e^{\beta^2}\gamma - \beta, \beta)\, e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta - \gamma e^{\beta^2})}\, d\beta$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}} \lambda_n(e^{\beta^2}\gamma - \beta, \beta)\, e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta - \gamma e^{\beta^2})}\, d\beta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}} e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta - \gamma e^{\beta^2})}\, d\beta$$

soit :

$$(\forall \gamma \neq 0) \quad k_n(\gamma) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}}^{\sqrt{\frac{1}{2}\log(\frac{n}{2})}} e^{\frac{1}{2}\gamma e^{\beta^2}(2\beta - \gamma e^{\beta^2})}\, d\beta .$$

Faisant tendre γ vers 0 , on peut conclure. □

Il est maintenant évident que $k(0) = +\infty$: $k(0) = \lim_{n\to+\infty} k_n(0)$ par définition, et on applique le Lemme 9.2.

§ 10. SEMI-CONTINUITÉ .

On a vu au § 4 que $\xi \to \hat{\sigma}(\xi)(X) = k(\xi)$ était une fonction semi-continue sur O; de façon plus précise, on a le

THÉORÈME 10.1 : Soit $v \in \mathbb{D}^\infty(X;\mathbb{R})$, $v \geq 0$, et soit v^* une redéfinition de v . Alors $\xi \to \int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx)$ est une application semi-continue inférieurement de O dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration. Par définition de $\hat{\sigma}$, on a :

$$\int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \ell(\xi)\int_X v^*(x)\exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^\xi(dx) .$$

Comme ci-dessus, le théorème de convergence croissante permet d'écrire :

$$\int_X v^*(x)\exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\sigma^\xi(dx) = \lim_{n\to+\infty}\uparrow \int_X v^*(x)\exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right)\varphi_n^*(x)\,\sigma^\xi(dx)$$

(on utilise ici le Lemme 3.2 de [2] , en vertu duquel $v^* \geq 0$ quasi-sûrement, donc σ^ξ-presque sûrement).

On a donc :

$$\int_X v^*(x)\hat{\sigma}(\xi)(dx) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \ell(\xi) \int_X v^*(x)\, \varphi_n^*(x) \exp\left(\frac{1}{a^*(x)}\right) \sigma^{\xi}\,(dx) = \lim_{n\to+\infty} \uparrow k_{\varphi_n, v}(\xi)$$

d'après la définition même de σ. Mais les $k_{\varphi_n, v}$ sont des fonctions continues (et même $\mathcal{C}^\infty$), comme nous l'avons établi au Théorème 2.1, et on conclut de la même façon que plus haut. Cela établit la dernière assertion du Théorème. □

Le rapporteur de cet article a bien voulu attirer mon attention sur le travail de Feyel et de la Pradelle ([9']). Ces derniers construisent une "mesure d'aire" sur des espaces de Wiener lusiniens, qui généralise celle construite dans [1] sur l'espace de Wiener classique. La mesure en question est toujours de masse totale finie, et ne saurait donc pas coïncider avec $\widehat{\sigma}(\xi)$ dans le cas du contre-exemple du § 9 : nos résultats ne sont donc pas contenus dans ceux de [9'].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.AIRAULT et P.MALLIAVIN. - Intégration géométrique sur l'espace de Wiener. Bulletin des Sciences Mathématiques 112, pp. 3-52, 1988.

[2] H.AIRAULT et J. Van BIESEN. - Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur une sous-variété de l'espace de Wiener. Bulletin des Sciences Mathématiques 115, pp. 185-210, 1991.

[3] T.KAZUMI et I.SHIGEKAWA. - Measures of finite (r,p)-energy and potentials on a separable metric space. Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526, pp. 415-444.

[4] P.KRÉE et M.KRÉE. - Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. C.R. de l'Acad. Sc., t. 296, pp. 833-836, 1983.

[5] P.MALLIAVIN. - Implicit functions in finite corank on the Wiener space. Proceedings of the Taniguchi Symposium on Stochastic Analysis, Katata, 1982 .

[6] P.MALLIAVIN. - Stochastic analysis (ouvrage à paraître).

[7] P.-A.MEYER. - Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes. Séminaire de Probabilités XVIII , pp. 179-193 (1982/83), Lecture Notes in Mathematics 1059.

[8] D.W.STROOCK. - The Malliavin Calculus and its applications to Second Order Parabolic Differential Equations: Part I. Mathematical Systems Theory 14, pp. 25-65, 1981.

[9] H.SUGITA. - Positive generalized Wiener Functions and Potential Theory over abstract Wiener Spaces. Osaka Journal of Mathematics 25, pp. 665-696, 1988.

[9'] D.FEYEL et A.de la PRADELLE. - Hausdorff measures on the Wiener space. Potential Analysis 1, pp. 177-189, 1992.