**L3 MATHÉMATIQUES–GÉOMÉTRIE**
**CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU DU 13 MARS 2020**

PAUL LESCOT

## Exercice I

(1) La direction $\overrightarrow{Y}$ de $Y$ est engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (2,2,2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2,3,1)$ ; ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils engendrent donc un sous–espace de $\vec{X}$ de dimension 2 ; on a donc $dim(\vec{Y}) = 2$, soit $dim(Y) = 2$.

(2) Le point $M$ de coordonnées $(x,y,z)$ appartient à $Y$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ appartient à $\overrightarrow{Y}$, c'est–à–dire si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$

soit

$$(x,y,z+1) = \lambda(2,2,2) + \mu(-2,3,1).$$

On en déduit les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 2\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu. \\ z = 2\lambda + \mu - 1 \end{cases}$$

(3) Il suffit d'éliminer $\lambda$ et $\mu$ dans les équations ci–dessus :

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 2\mu \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = 2\lambda + \mu - 1 \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases} \mu = z - 2\lambda + 1 \\ x = 2\lambda - 2(z - 2\lambda + 1) \\ y = 2\lambda + 3(z - 2\lambda + 1) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \mu = z - 2\lambda + 1 \\ x = 6\lambda - 2z - 2 \\ y = -4\lambda + 3z + 3 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \mu = z - 2\lambda + 1 \\ \lambda = \dfrac{x}{6} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{1}{3} \\ y = -4(\dfrac{x}{6} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{1}{3}) + 3z + 3. \end{cases}$$

$y = -4(\frac{x}{6} + \frac{z}{3} + \frac{1}{3}) + 3z + 3$ est donc une équation affine de $Y$. Elle équivaut à

$$3y = -2x - 4z - 4 + 9z + 9,$$

soit à

$$2x + 3y - 5z - 5 = 0.$$

$$2x + 3y - 5z - 5 = 0$$

est donc une équation affine de $Y$.

(4) Du fait que $2.6+3.1-5.2-5 = 0$ , on voit au moyen de (3) que $D$ appartient à $Y =< A, B, C >$ ; on a donc

$$W =< A, B, C, D >=< A, B, C >= Y$$

soit

$$W = Y.$$

(5) Du fait que $2.0 + 3.1 - 5.1 - 5 = -7 \neq 0$, on voit que $E \notin Y$ ; $Z$ contient donc strictement $Y$, d'où $dim(Z) > dim(Y) = 2$ et $dim(X) \geq dim(Z) \geq 3 = dim(X)$ ; on a donc $dim(Z) = dim(X) = 3$ et

$$Z = X.$$

(6) Une équation affine de ce sous–espace a même partie linéaire que celle trouvée en (3) pour le sous–espace parallèle $Y$ ; elle est donc de la forme

$$2x + 3y - 5z + c = 0$$

pour une constante $c$ ; en écrivant que le sous–espace contient $F$, on obtient $c = 0$ et l'équation

$$2x + 3y - 5z = 0.$$

On en déduit des équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \frac{2}{5}\lambda + \frac{3}{5}\mu. \end{cases}$$

On peut aussi translater les équations de (2) par le vecteur $\overrightarrow{AF} = (1, 1, 2)$ et l'on obtient

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 2\mu + 1 \\ y = 2\lambda + 3\mu + 1 \\ z = 2\lambda + \mu + 1. \end{cases}$$

## Exercice II

(1) Soient $M$ et $N$ deux points de $X$. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{h(M)h(N)} &= \overrightarrow{h(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nh(N)} \\
&= -\overrightarrow{Mh(M)} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nh(N)} \\
&= -\overrightarrow{f(M)g(M)} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{f(N)g(N)} \\
&= -\overrightarrow{f(M)g(M)} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{f(N)f(M)} + \overrightarrow{f(M)g(M)} + \overrightarrow{g(M)g(N)} \\
&= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{f(N)f(M)} + \overrightarrow{g(M)g(N)} \\
&= \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{f(M)f(N)} + \overrightarrow{g(M)g(N)} \\
&= \overrightarrow{MN} - \vec{f}(\overrightarrow{MN}) + \vec{g}(\overrightarrow{MN}).
\end{aligned}$$

Ceci est une fonction linéaire de $\overrightarrow{MN}$, donc $h$ est affine.

(2) On vient de voir que, pour tout couple $(M, N) \in X^2$

$$\vec{h}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{h(M)h(N)} = \overrightarrow{MN} - \vec{f}(\overrightarrow{MN}) + \vec{g}(\overrightarrow{MN}) = Id_{\vec{X}}(\overrightarrow{MN}) - \vec{f}(\overrightarrow{MN}) + \vec{g}(\overrightarrow{MN})$$

d'où

$$\vec{h} = Id_{\vec{X}} + \vec{g} - \vec{f}.$$

## Exercice III

Cherchons $M$ comme barycentre de $(A, a)$, $(B, b)$ et $(C, c)$, avec $a + b + c = 1$.

Dire que $M$ appartient à $(AE)$ revient à affirmer que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ ; mais

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

et

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC};$$

$\overrightarrow{AM}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ si et seulement si $b = c$.

De même il s'avère que $M$ appartient à $(BF)$ si et seulement si $a = c$, et que $M$ appartient à $(CD)$ si et seulement si $a = b$. Il suffit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = c \\ a = c \\ a = b. \end{cases}$$

Il apparaît que $(a, b, c) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ en est solution.

On retrouve le fait que l'isobarycentre d'un triangle (ici $(ABC)$) est le point de concours de ses médianes (ici $(AE)$, $(BF)$ et $(CD)$).