Semi–anneaux de caractéristique 1

Saint–Etienne du Rouvray
22 Septembre 2016

Paul LESCOT
Paul.Lescot@univ-rouen.fr
http ://www.univ-rouen.fr/LMRS/Persopage/Lescot

Université de Rouen
Avenue de l'Université BP12
76801 Saint-Etienne du Rouvray (FRANCE)

- Semi–anneaux
- Idéaux et congruences
- Congruences maximales
- Idéaux premiers
- Semi–corps
- Références

On appelle *semi–anneau* un ensemble A muni de deux opérations $+$ et . satisfaisant tous les axiomes usuels des anneaux à l'exception de l'existence de symétriques pour l'addition. En d'autres termes l'addition est associative et commutative, d'élément neutre 0_A ; la multiplication est associative, commutative, d'élément neutre 1_A et distributive par rapport à l'addition. De plus

$$(\forall x \in A)\ x.0_A = 0_A.x = 0_A.$$

Le semi–anneau est dit *de caractéristique* 1 si on a de plus

$$(\forall x \in A)\ x + x = x.$$

C'est le cas si et seulement si $1_A + 1_A = 1_A$.
Par exemple $B_1 := \{0, 1\}$ avec $1 + 1 = 1$ est un semi–anneau de caractéristique 1.

Désormais nous noterons $0 = 0_A$, $1 = 1_A$ et $ab = a.b$. Lorsque $A \neq \{0\}$, nous identifierons $\{0, 1\}$ à B_1 ; A deviendra alors, en un sens évident, une B_1–algèbre (cf. [3], Définition 4.1).

Definition

On entend par idéal de A une partie de A contenant 0, stable par addition, et telle que

$$(\forall a \in A)\ (\forall x \in I)\ ax \in I.$$

Definition

L'idéal I est dit premier si $I \neq A$ et

$$ab \in I \implies (a \in I) \text{ ou } (b \in I).$$

On notera $Pr(A)$ l'ensemble de ces idéaux premiers.

Definition

On appelle *congruence* sur A une relation d'équivalence compatible avec les opérations de A, c'est–à–dire telle que $a\mathcal{R}a^{'}$ et $b\mathcal{R}b^{'}$ impliquent $a+b\mathcal{R}a^{'}+b^{'}$ et $ab\mathcal{R}a^{'}b^{'}$.

Pour toute congruence $\mathcal{R}$ sur A, l'ensemble quotient $\dfrac{A}{\mathcal{R}}$ est naturellement muni d'une structure de semi–anneau de caractéristique 1 ([3], Définition 4.2).
Les congruences sur A sont naturellement ordonnées par inclusion.

Pour cette relation d'ordre existent un élément minimal $=$ et un élément maximal $\mathcal{C}_0(A) : A \times A$.

Definition

Pour $\mathcal{R}$ une congruence sur A, on pose

$$I(\mathcal{R}) := \{x \in A \mid x\mathcal{R}0\}.$$

C'est un idéal de A.

Definition

La congruence $\mathcal{R}$ est dite *première si* $\mathcal{R} \neq \mathcal{C}_0(A)$ *et*

$$ab \, \mathcal{R} \, 0 \implies a \, \mathcal{R} \, 0 \text{ ou } b \, \mathcal{R} \, 0.$$

Il est visible que $\mathcal{R}$ est première si et seulement si $I(\mathcal{R})$ est premier. On notera $Spec(A)$ l'ensemble des congruences premières sur A.

Proposition

Pour tout idéal J de A, il existe parmi les congruences $\mathcal{R}$ sur A telles que

$$(\forall x \in J)\ x\mathcal{R}0$$

un unique élément minimal : $\mathcal{R}_J$. Posons $\overline{J} := I(\mathcal{R}_J)$; on a $J \subseteq \overline{J}$, $\overline{\overline{J}} = \overline{J}$ et

$$\overline{J} = \{x \in A |\ (\exists y \in J)\ x + y = y\}.$$

De plus

$$\mathcal{R}_{I(\mathcal{R})} \leq \mathcal{R}$$

Théorème

([4],Théorème 3.8) Soit J un idéal de A ; on a équivalence entre

1. $J = \overline{J}$
2. $$\forall (x,y) \in A^2 \ (x + y = y \ \mathit{et} \ (y \in J)) \implies (x \in J).$$
3. *Il existe une congruence $\mathcal{R}$ sur A telle que $J = I(\mathcal{R})$.*

Lorsque ces conditions équivalentes sont satisfaites, J est dit saturé.

Sur $Pr(A)$ et sur $Spec(A)$ sont définies deux topologies naturelles analogues à celle de Zariski. Les fermés de $Pr(A)$ sont les $(W(S))_{S\subseteq A}$, où

$$W(S) := \{\mathcal{P} \in Pr(A) | S \subseteq \mathcal{P}\}$$

et les fermés de $Spec(A)$ sont les $(V(S))_{S\subseteq A}$, où

$$V(S) := \{\mathcal{R} \in Spec(A) | S \subseteq I(\mathcal{R})\}$$

Vu que $V(S) = I^{-1}(W(S))$, la topologie de $Spec(A)$ est la topologie initiale induite par l'application

$$\begin{aligned} I : \quad & Spec(A) \to Pr(A) \\ & \mathcal{R} \mapsto I(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

([4], Proposition 3.15).

Soit $MaxSpec(A)$ l'ensemble des congruences maximales parmi les congruences autres que $\mathcal{C}_0(A)$.

Théorème

$Maxspec(A) \subseteq Spec(A)$ ([4],Théorème 3.5).

On le munit de la topologie induite par celle de $Spec(A)$.
Soit maintenant $Pr_s(A)$ l'ensemble des idéaux premiers saturés de A ; on le munit de la topologie induite par celle de $Pr(A)$.
Pour $\mathcal{P} \in Pr_s(A)$, définissons une relation $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ sur A par

$$x\mathcal{S}_\mathcal{P}y \equiv ((x \in \mathcal{P})\text{et}(y \in \mathcal{P})) \text{ ou } ((x \notin \mathcal{P})\text{et}(y \notin \mathcal{P})).$$

Il est facile de voir qu'il s'agit d'une congruence sur A, et que le quotient $\dfrac{A}{\mathcal{S}_P}$ est isomorphe à B_1 ; en particulier, $\mathcal{S}_\mathcal{P} \in MaxSpec(A)$.

Posons $\alpha_A(\mathcal{P}) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

Théorème

([5],Theorem 3.1)
α_A *est une bijection, dont la réciproque est donnée par*

$$\beta_A(\mathcal{R}) = \alpha_A^{-1}(\mathcal{R}) = I(\mathcal{R})$$

α_A *et* β_A *sont continues pour les topologies définies ci–dessus ; en particulier,* $MaxSpec(A)$ *et* $Pr_s(A)$ *sont homéomorphes.*

Par exemple, pour $A = B_1[x_1, ..., x_n]$, il y a exactement 2^n congruences maximales sur A (la congruence $\mathcal{R}$ étant déterminée de manière unique par $J := \{i | x_i \mathcal{R} 0\} \subseteq \{1, ..., n\}$), et tous les quotients sont isomorphes à B_1. En d'autres termes, B_1 est “algébriquement clos”et le *Nullstellensatz* s'y applique ([7] ; [3], Théorème 4.8 et Remarque 4.9 ; [4], Remarque 2 après le Théorème 3.2).

Plusieurs de leurs propriétés usuelles se transportent à notre situation. Par exemple

Théorème

([6],Théorème 5.1) L'ensemble

$$Nil(A) := \{x \in A | (\exists n \in \mathbf{N}) x^n = 0\}$$

des éléments nilpotents de A est un idéal saturé de A.
De plus

$$Nil(A) = \bigcap_{\mathcal{P} \in Pr(A)} \mathcal{P} = \bigcap_{\mathcal{P} \in Pr_s(A)} \mathcal{P}$$

Théorème

([6],Théorème 3.1)Soit $\mathcal{P}$ un élément minimal de $Pr(A)$ ou de $Pr_s(A)$; alors chaque élément de $\mathcal{P}$ est un diviseur de 0 dans A.

En revanche l'analogue naturel de la décomposition primaire (pour les idéaux saturés) est inexact en général ([6], Exemple 6.2).

On entend par semi–corps un semi–anneau K tel que $1_K \neq 0_K$ et que chaque élément de $K \setminus \{0_K\}$ possède un inverse pour la multiplication.
Par exemple $\mathbf{R}^+_{max} := (\mathbf{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ est un semi–corps ; $\mathbf{Z}_{max} := (\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}, max, +)$ en est un sous–semi–corps.
B_1 lui–même est un semi–corps ; en fait, $\mathbf{Z}_{max}$ contient un sous–semi–corps $\{-\infty, 0\}$ isomorphe à B_1.
Cette notion est naturelle ainsi que l'indiquent les résultats suivants :

Théorème

Un semi–corps fini est, soit un corps, soit isomorphe à B_1.

Théorème

(Castella, [1],Proposition 2(c))Soit K *un semi–corps régulier (au sens de Von Neumann) pour l'addition, c'est–à–dire que*

$$(\forall x \in K)(\exists y \in K) x = x + y + x \text{ et } y = y + x + y.$$

Alors, soit K *est un corps, soit* K *est de caractéristique* 1.

Et enfin un résultat récent de Connes et Consani :

Théorème

([2],Proposition B.3) Soit K un semi–corps de groupe multiplicatif monogène ; alors on est dans l'un des cas suivants

1. $K \simeq B_1$,
2. K *est un corps fini,*
3. $K \simeq \mathbf{Z}_{max}$.

[1] D. Castella *Eléments d'Algèbre Linéaire tropicale* Linear Algebra and its Applications Volume 432, Issue 6, 1 March 2010, 1460-1474.

[2] A. Connes, C. Consani *Geometry of the scaling site*, 2016 ; arxiv 1603.03191

[3] P. Lescot *Algèbre absolue* Ann. Sci. Math. Québec 33 (2009), no 1, 63-82.

[4] P. Lescot *Absolute Algebra II-Ideals and Spectra* Journal of Pure and Applied Algebra 215(2011), no. 7, 1782-1790.

[5] P. Lescot *Absolute Algebra III-The saturated spectrum* Journal of Pure and Applied Algebra 216(2012), no. 7, 1004-1015.

[6] P. Lescot *Prime and primary ideals in semirings* Osaka J. Math. 52(2015), 721-736.

[7] Y. Zhu *Combinatorics and characteristic one algebra*, preprint, 2000.