M1 MFA 2020–2021, ALGÈBRE
EXAMEN DU 12 JANVIER 2021, 14H-16H
MADRILLET, SALLE M2

PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler. On rappelle que, si $n = p_1^{a_1}...p_m^{a_m}$ avec les p_i premiers deux à deux distincts et les $a_i \geq 1$, alors

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i - 1}(p_i - 1) \ ;$$

en particulier, chaque $p_i - 1$ divise $\phi(n)$.

Exercice I

Déterminer l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{n \geq 1 \,|\, \phi(n) = 42\}.$$

Exercice II

Soit A un anneau, que l'on ne suppose *a priori* ni commutatif ni unitaire. On suppose que

$$(\forall x \in A)\ x^2 = -x.$$

(1) Etablir que, pour tout $(x, y) \in A^2$, $xy = -yx$

$$\text{(on pourra considérer}(x + y)^2.)$$

(2) Montrer que A est commutatif.

(3) On suppose dans cette question que A est un corps. Etablir l'isomorphisme de corps

$$A \simeq \frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}.$$

Exercice III

Soit B un anneau unitaire tel que $\mathbf{Z}$ soit un sous–anneau unitaire de B, et soit I un idéal maximal de B.

(1) Montrer que $J := I \cap \mathbf{Z}$ est un idéal premier de $\mathbf{Z}$.

On suppose dorénavant $J \neq \{0\}$.

(2) Etablir l'existence d'un nombre premier p tel que $J = p\mathbf{Z}$.

(3) Montrer que $\dfrac{B}{I}$ est un corps de caractéristique p.

EXERCICE IV

On considère l'anneau $A := \mathcal{M}_2(\dfrac{\mathbf{Z}}{3\mathbf{Z}})$ des matrices 2×2 à coefficients dans le corps $\dfrac{\mathbf{Z}}{3\mathbf{Z}}$.

Exhiber un sous–anneau unitaire K de A de cardinal 9 qui soit un corps.