

M1 MFA, ALGÈBRE
EXAMEN DU 14 JANVIER 2020, 14H–16H

PAUL LESCOT

Documents et calculatrices interdits.

Les trois exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler.

EXERCICE I

Pour $k \geq 1$, soit

$$\mathcal{E}_k := \{n \geq 1 \mid \phi(n) = k\}.$$

- (1) On a vu que $\mathcal{E}_{14} = \mathcal{E}_{26} = \emptyset$. Déterminer le plus petit entier $k > 13$ tel que $\mathcal{E}_{2k} = \emptyset$.
- (2) Déterminer $\mathcal{E}_{64}$.

EXERCICE II

L'objet de l'exercice est d'établir que la seule solution dans $\mathbf{N}^2$ de l'équation

$$x^2 + 1 = y^3$$

est $(x, y) = (0, 1)$.

On rappelle que l'anneau

$$A = \mathbf{Z}[i] := \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$$

des entiers de Gauss, muni des opérations induites par les opérations usuelles de $\mathbf{C}$, est euclidien, donc principal.

- (1) Déterminer les éléments inversibles de A et montrer que chacun d'entre eux est un cube.
- (2) Quels sont, dans A , les diviseurs de $2i$?
Dorénavant on suppose

$$x^2 + 1 = y^3$$

avec $(x, y) \in \mathbf{N}^2$.

- (3) Etablir que x est pair (on pourra raisonner modulo 4).
- (4) Montrer que $x + i$ et $x - i$ sont premiers entre eux dans A .
- (5) En déduire que $x + i$ est un cube dans A .
- (6) Conclure que $x = 0$ et $y = 1$.

EXERCICE III

Soit p un nombre premier ; on considère l'anneau $A := \mathcal{M}_2\left(\frac{\mathbf{Z}}{p\mathbf{Z}}\right)$ des matrices 2×2 à coefficients dans le corps $\frac{\mathbf{Z}}{p\mathbf{Z}}$.

Exhiber un idéal à gauche I de A de cardinal $|I| = p^2$.