Master 1 Mathématiques et Applications : Algèbre
Examen du 16 Janvier 2018

Paul Lescot

Durée : 2h.

Documents et calculatrices interdits.
Les trois exercices sont indépendants les uns des autres. Une rédaction claire sera appréciée.

On rappelle que l'élément $x \neq 0_A$ de l'anneau A est dit **diviseur de** 0 s'il existe $y \in A$, $y \neq 0_A$, tel que $xy = 0_A$.
On notera $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des diviseurs de 0 de A.

Exercice I

Soit A un anneau fini, commutatif et unitaire.

1. Montrer que, si A est intègre, A est un corps.
2. On suppose dorénavant que A n'est pas intègre. Soit donc $(a, b) \in (A \setminus \{0_A\})^2$ avec $ab = 0_A$.
   Posons
$$\begin{aligned} \theta \quad : \quad & A \to A \\ & x \mapsto ax \end{aligned}$$
3. Etablir que
$$(\forall y \in A) \;\; |\theta^{-1}(y)| \leq 1 + |\mathcal{D}(A)|.$$
4. Montrer que
$$(\forall x \in A) \;\; \theta(x) \in \mathcal{D}(A) \cup \{0_A\}.$$
5. Déduire de 3. et 4. que
$$|\mathcal{D}(A)| \geq \sqrt{|A|} - 1 \qquad (*)$$
6. Soit p un nombre premier. Exhiber un anneau A de cardinal p^2 tel qu'on ait l'égalité dans (*).

Exercice II

Soit A un anneau commutatif, unitaire et intègre, et soit $B := A[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A. Etablir l'équivalence entre deux propriétés suivantes :

1. A est un corps,
   et
2. B est principal.

Exercice III

Soit A un anneau tel que

$$(\forall a \in A) \quad a^2 = a. \tag{**}$$

1. Etablir que, pour chaque $x \in A$, $x + x = 0_A$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Soit $\leq$ la relation sur A définie par

   $$x \leq y \text{ si et seulement si } xy = x.$$

   Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre.
4. Dans cette question, on suppose A fini. Montrer que A est unitaire (on pourra considérer, après avoir justifié son existence, un élément e de A maximal pour $\leq$, et calculer, pour $x \in A$, $e(x + e - ex)$).
5. Trouver un exemple d'anneau A non unitaire vérifiant (**).

.