SUJETS POUR MÉMOIRE M2 MASTER MFA

Dalibor Volný

1. Théorèmes ergodiques

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé ($\mathcal{A}$ est une tribu de sous-ensembles de Ω, μ est une mesure). Soit $(X_i)_i$ une suite dans L^2. Si $E(X_i X_j)$ ne dépend que de $|i-j|$, on dit que la suite est faiblement stationnaire.

Théorème (von Neumann). *Si la suite $(X_i)_i$ est faiblement stationnaire alors les sommes $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} X_i$ convergent dans L^2.*

Soit T un automorphisme de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Ceci veut dire que T est une bijection de l'ensemble Ω sur Ω, bimesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}$, et $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ (μ préserve la mesure μ).
Par $\mathcal{I}$ on note la tribu des $A \in \mathcal{A}$ tels que $T^{-1}A = A$.

Soit f une fonction sur Ω mesurable, $S_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$. En corollaire du Théorème de von Neumann on a :

Théorème (von Neumann). *Si $f \in L^2(\mu)$ alors $(1/n)S_n(f)$ convergent vers $E(f|\mathcal{I})$ dans L^2.*

De plus, on peut démontrer

Théorème (Birkhoff). *Si $f \in L^1(\mu)$ alors $(1/n)S_n(f)$ convergent vers $E(f|\mathcal{I})$ dans L^1 et presque sûrement.*

Soit $\Omega = A^{\mathbb{Z}}$ avec A un ensemble dénombrable ou fini (non vide), $\mathcal{A}$ la tribu produit, T le décalage (pour $x = (x)_i \in \Omega$, $(Tx)_i = x_{i+1}$). Pour tout n on définit la partition $\mathcal{A}_n$ de Ω en ensembles $\{x \in \Omega : (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)\}$, $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Si $H(\mathcal{A}_n)$ est l'entropie de la partition $\mathcal{A}_n$ alors $(1/n)H(\mathcal{A}_n)$ convergent pour $n \to \infty$ (vers l'entropie du système).

Le Théorème de Shannon-Breiman-McMillan rend cette convergence presque sûre.

Les théorèmes de von Neumann et Birkhoff ont été trouvé dans les années 30 du 20e siècle, le Théorème de Shannon-Breiman-McMillan après 1948 (il y a plusieurs versions).

Dans le théorème de Shannon-Breiman-McMillan on peut avoir le théorème limite central (il y a des résultats par N. Haydn et S. Vaienti). Ceci est une recherche récent, pas encore fini.

Littérature :

W. Parry : Topics in Ergodic Theory, Cambridge Univ. Press 1981 (classique avec une excellente pédagogie),

N. Haydn : The CLT for uniformly strong mixing measures, Stochastics and Dynamics Vol. 12, No. 4 (2012)

2. Théorèmes limites pour les chaînes de Markov

Soit $(\xi_i)_i$ une chaîne de Markov réversible, à l'espace d'états S, f une fonction mesurable sur S.

Le mémoire consiste en étude de théorèmes limites centraux pour le processus $(f(\xi_i))_i$ publiés dans les articles

C. Kipnis et S. R. S. Varadhan : Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, Comm. Math. Phys. Volume 104, Number 1, pp. 1-19 (1986)

ou

Ou Zhao, M. Woodroofe, D. Volný : A CLT for reversible processes with non-linear growth of variance, J. Appl. Probab. vol. 47 pp. 1195-2202 (2010).

Dans les deux cas il reste des problèmes ouverts (mais difficiles).

Les deux mémoires peuvent mener vers une thèse de doctorat dans le domaine

Théorèmes limites dans les systèmes dynamiques.

On peut étudier les théorèmes limites pour les processus de type $(f \circ T^i)i$ mais à la place de puissances d'une seule transformation on peut avoir un groupe (par exemple $\mathbb{Z}^d$).