DE L'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1
AUX NOMBRES DE SALEM

El Houcein EL ABDALAOUI et Gérard GRANCHER
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,
UMR CNRS - Université de Rouen, 76821 Mont Saint Aignan.

Les nombres de Salem sont liés à un théorème célèbre de Koksma sur l'équirépartition modulo 1 des suites géométriques.

Pour tout x, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x.

Définition 1. Une suite (u_n) de nombres réels est équirépartie modulo 1 si pour toute fonction f continue périodique de période 1

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)dt.$$

Par le critère de Weyl (1916), ces suites sont caractérisées par

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ip\ u_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Historiquement, le problème de la répartition d'une suite a été soulevé pour la première fois par Lagrange, à propos du calcul du mouvement des grandes planètes. Plus précisément, ce calcul faisait intervenir la répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. En 1916, H. Weyl formalisa la notion d'équirépartition modulo 1 des suites et montra que pour tout α irrationnel, la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1. En effet, il facile de voir que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ipk\alpha} = \frac{1}{n}\frac{1-e^{2\pi inp\alpha}}{1-e^{2\pi ip\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De même, il est clair que si α est rationnel, ce résultat ne subsiste plus. La question d'équirépartion d'autres suites, en particulier des suites géométriques, est dès lors légitime[1].

Un contre-exemple : Notons ϕ, le nombre d'or. Rappelons que $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \simeq 1,618$. Il est aisé de prouver que la suite (ϕ^n) n'est pas équirépartie modulo 1. En effet, posons $G_n = \phi^n + (-1/\phi)^n$; la suite (G_n) satisfait la relation de récurrence[2] $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ avec

[1] On notera au passage que les champs d'application de la théorie de répartition des suites sont assez larges. En mathématiques, elle est présente en théorie des nombres, probabilité, statistiques et, via les méthodes de Monte-Carlo, s'étend tant à la résolution des systèmes d'équations linéaires, au calcul d'intégrales définies qu'à l'intégration d'équations aux dérivées partielles ... Ainsi le manuel de la calculatrice HP 25 propose de calculer une suite de réalisations aléatoires indépendantes uniformes sur [0, 1] par la formule de récurrence $x_n = \{(\pi + x_{n-1})^5\}$.

[2] La suite de Fibonacci, (F_n), satisfait la même formule de récurrence mais avec d'autres valeurs initiales : $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ (ou $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ selon les auteurs).

$G_0 = 2$ et $G_1 = 1$. Pour tout n, G_n est donc un entier. Comme $1/\phi < 1$, la suite $(-1/\phi)^n$ tend vers 0 et ϕ^n est de plus en plus proche d'un entier quand $n \to \infty$. Plus précisément la partie fractionnaire de ϕ^n tend vers 1 quand $n \to \infty$ avec n pair et tend vers 0 quand $n \to \infty$ avec n impair.

n	$\{\phi^n\}$
1	0,618 ...
2	0,618 ...
3	0,236 ...
4	0,854 ...
5	0,090 ...
6	0,944 ...

n	$\{\phi^n\}$
10	0,992 ...
11	0,005 ...
20	0,999 9..
21	0,000 04.
30	0,999 999
31	0,000 000

TABLE 1. Valeur de la partie fractionnaire des puissances du nombre d'or

Il est difficile de prouver qu'une suite géométrique (x^n) est équirépartie modulo 1. Pourtant, et cela semble paradoxal, nous avons le théorème suivant.

Théorème 2 (Koksma, 1933)**.** *Pour presque tout $x > 1$, la suite géométrique (x^n) est équirépartie modulo 1.*

Le théorème de Koksma montre qu'une suite géométrique, dont la raison (> 1) est "prise au hasard" (selon la mesure de Lebesgue), est presque sûrement équirépartie modulo 1. Les réels $x > 1$, pour lesquels la suite (x^n) n'est pas équirépartie modulo 1, forment donc un ensemble exceptionnel. Les nombres de Pisot-Vijayaraghavan définis ci-dessous appartiennent à cet ensemble exceptionnel, mais auparavant quelques définitions.

Définition 3. On dit qu'un nombre réel θ est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme P à coefficients entiers dont le coefficient du terme de plus haut degré est l'unité. On peut montrer que, pour chaque θ entier algébrique, le polynôme P de plus petit degré qui lui est associé est unique et que toutes ses racines (appelées *conjugués de θ*) sont simples.

Définition 4. On appelle *nombre de Pisot-Vijayaraghavan* tout entier algébrique $\theta > 1$ dont tous les conjugués (autre que lui-même) sont de module strictement inférieur à 1.

On note S leur ensemble, dit **classe** S ... en hommage à Raphaël Salem.

Le nombre d'or appartient à la classe S, son polynôme associé est $X^2 - X - 1$, $-1/\phi$ est son conjugué.

Voici deux résultats sur la classe S.

Théorème 5. *La classe S est contenue dans l'ensemble exceptionnel du théorème de Koksma.*

La démonstration, comme dans le cas du nombre d'or, repose sur la propriété suivante :
la somme[3] *$\theta^n + \theta_2^n + ... + \theta_s^n$ des puissances n-èmes des conjugués d'un entier algébrique θ est un entier.*
Comme θ est de classe S et que nous avons $\lim_{n\to\infty} \theta_i^n = 0$ pour tout $i > 1$, nous en concluons que si $\theta \in S$ alors θ^n s'approche d'un entier quand $n \to \infty$. La suite (θ^n) n'est donc pas équirépartie modulo 1.

[3] parfois nommée *somme de Newton*.

Théorème 6 (Salem, 1944)**.** *La classe S est fermée dans $\mathbb{R}$.*

Ce très joli résultat fut une véritable surprise pour les mathématiciens concernés par le sujet, y compris pour Charles Pisot, qui croyait que la classe S était dense dans $[1, +\infty[$.

Le plus petit nombre de la classe S (1,324 717 958 ...) est la racine réelle du polynôme[4]

$$X^3 - X - 1.$$

Ce nombre a été découvert par R. Salem en 1944. Siegel, la même année, montra que c'est le plus petit nombre possible de classe S.

Définition 7. Les *nombres de Salem* sont les entiers algébriques réels strictement supérieurs à 1 dont un conjugué au moins est sur le cercle unité et les autres (à l'exception de lui-même) sont de module inférieur ou égal à 1.
L'ensemble des nombres de Salem est noté T.

Théorème 8 (Salem, 1945)**.** *La classe S est contenue dans l'adhérence de T.*

Peu de choses sont connues sur les nombres de Salem[5]. On ignore s'il en existe un plus petit. Le plus petit nombre de Salem **connu** est la plus grande racine réelle du polynôme

$$X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$$

Ce nombre a été découvert par D. H. Lehmer en 1933 et confirmé par D.W. Boyd en 1977. Une valeur approchée de ce nombre est 1,176 280 81 .

Références

Marie-José BERTIN : Problèmes de Lehmer, nombres de Pisot et de Salem. *Quadrature 29*, 1997, pp 26-32.

Christophe DOCHE : *Mesures de Mahler et racines réelles de certaines familles de polynômes*, thèse de mathématiques Bordeaux I, 2000, (http://www.ufr-mi.u-bordeaux.fr/~cdoche/documents/these.ps.gz).

Charles PISOT[6] : *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques.* Séminaire de mathématiques supérieures. Presses de l'Université de Montréal (1966).

Raphaël SALEM : *Œuvres mathématiques*, Hermann (1967).

[4]Nous laissons le lecteur vérifier que ce polynôme possède une seule racine réelle et deux racines complexes de modules égaux et strictement inférieurs à 1.

[5]On sait que le polynôme associé à un nombre de Salem est de degré pair, qu'il est un polynôme réciproque (si x est racine alors $1/x$ est également racine), qu'il ne possède que deux racines réelles inverses l'une de l'autre, et que ses autres racines sont complexes et de module 1.

[6]Charles Pisot écrit en début de ce cours dispensé durant l'été 1963 : *Il y a quelques jours disparaissait subitement un mathématicien très profond, Raphaël Salem. Son œuvre, d'une grande originalité, a donné des orientations nouvelles à de nombreuses questions, tant dans les séries trigonométriques qu'en théorie des nombres. Les résultats que je propose d'exposer se rattachent à un théorème particulièrement curieux dû à R. Salem. C'est pourquoi je voudrais dédier ce cours à la mémoire de ce grand mathématicien qu'est Raphaël Salem.*