Document de synthèse

présenté par

Mustapha Mourragui

en vue de l'obtention du diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **Mathématiques – Probabilités**

Comportements hydrodynamiques et grandes déviations des systèmes de particules en interaction à l'équilibre et hors équilibre

---

Soutenue le 30 novembre 2012eErbnre12Tf13osi i1tsobt0urScia0001dil0

Remerc ements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude aux membres du jury Francis Comets Claude Dellacherie Claudio Landim Stefano Olla Errico Presutti et Ellen Saada Des remerciements tout particuliers vont à Francis Comets Stefano Olla et Errico Presutti qui m'ont fait l'honneur d'ac cepter de rapporter sur ce mémoire Je leur suis extrêmement reconnaissant du soin qu'ils y ont mis

Je tiens à remercier chaleureusement mes amis et collaborateurs mem bres de l'équipe systèmes de particules rouennaise (passée et actuelle Olivier enois Claudio Landim et Ellen Saada
- Olivier pour son amitié constante les discussions mathématiques et les col laborations en matière de recherche et d'enseignement
- Claudio pour sa grande disponibilité sa grande efficacité et pour toutes les discussions sur les mathématiques et les collaborations que nous avons pu avoir Chaque minute passée à discuter avec lui m'a été précieuse Sa présence dans ce jury et le fait d'avoir accepté d'être garant de mon hdr me touche particulièrement
- Ellen pour sa grande disponibilité ses encouragements constants ses col laborations et discussions scientifiques Elle a été d'une aide précieuse Je la remércie également pour la lecture minutieuse des premières versions de ce mémoire ainsi que pour sa présence dans ce jury

Je remercie également tous mes collaborateurs Olivier enois (Rouen Lorenzo ertini (Roma La Sapienza Raffaele Esposito (L' quila Jonathan Farfan (IMP Rio de Janeiro Claudio Landim (Rouen et IMP Rossana Marra (Roma Tor Vergata Enza Orlandi (Roma Tre Ellen Saada (Paris Descartes Sami Sellami (Rouen et Livio Triolo (Roma Tor Vergata Une partie non négligeable de ce travail est aussi la leur

Pour leur soutien financier et l'organisation de manifestations scientifiques et de groupes de travail j'adresse toute ma gratitude à l' NR LHMSHE GDR GREFI MEFI et NR SHEPI ainsi qu'à leurs responsables scien tifiques Thierry odineau Pierre Picco et Ellen Saada

Je remercie tous ceux qui font du laboratoire LMRS et du département de Mathématiques un cadre de travail aussi agréable

Pour terminer je dédie ce mémoire d'hdr avec toute mon affection à ma famille et surtout aux trois êtres qui me sont le plus chers ma Maman et mes deux enfants Camilia et Soufiane

Table des matières

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Introduction

Cette synthèse de mes travaux de re her he s'arti ule autour des systèmes de parti ules, de leurs omportements hydrodynamiques et des grandes déviations. La liste des travaux est proposée en fin de rapport. Ce premier hapitre d'introdu tion ontient une brève présentation des systèmes de parti ules ainsi que des notions de limite hydrodynamique et de grandes déviations. Nons exposerons ensuite une lasse de systèmes de parti ules auxquels nous allons faire référen e dans les hapitres suivants.

Un système de parti ules est un modèle sto hastique qui dé rit l'évolution de parti ules (en nombre fini ou infini) en intera tion sur un réseau (fini ou infini) appelé ensemble des sites ; au ours de l'évolution et à des instants aléatoires, les parti ules se dépla ent (naissent, meurent, entrent en ollision,...) sur le réseau selon une loi de probabilité qui dépend de la onfiguration des parti ules à et instant. Ces modèles ont été introduits dans les années 70 [99, 100, 41, 42], d'une part pour des motivations probabilistes, et d'autre part suivant une appro he physique (mé anique statistique, omportement aléatoire mi ros opique de molé ules). Depuis, les systèmes de parti ules ont fait l'objet de nombreux travaux et ont donné lieu à une littérature abondante. Leurs domaines d'appli ations sont très nombreux : physique théorique, analyse d'images, biologie, sondages...
Plusieurs ouvrages rassemblent les prin ipaux aspe ts probabilistes de es modèles, itons par exemple [82, 30, 49, 83], où sont étudiés l'existen e de es pro essus de Markov en volume infini ave différentes onstru tions, ainsi que l'existen e de leurs mesures invariantes, l'ergodi ité...

Une des prin ipales motivations physiques de l'étude de la limite hydrodynamique provient d'une bran he de la mé anique statistique. L'objet est de ara tériser l'équation régissant l'évolution ma ros opique d'un fluide ou d'un gaz à partir d'une dynamique mi ros opique aléatoire : en vertu du grand nombre de parti ules qu'il ontient, la des ription de l'évolution d'un fluide dans un volume doit se faire à travers un ensemble de variables ma ros opiques qui le ara térisent. Au niveau mi ros opique, l'évolution des molé ules est modélisée sur le volume dis rétisé par une dynamique aléatoire (système de parti ules) ; après hangement d'é helle (renormalisation en espa e et en temps), les quantités onservées par ette dynamique mi ros opique donnent par passage à la limite dite hydrodynamique des équations aux dérivées partielles appelées équations hydrodynamiques, qui dé rivent l'évolution spatiale et temporelle des variables ma ros opiques.

Nons distinguerons deux types de systèmes, à l'équilibre et hors équilibre. Les systèmes dits à l'équilibre sont les mieux ompris et les plus largement dans [103] et Quastel en 1992 dans [95]. Dans les livres [101, 35, 69, 94] sont développées les principales méthodes utilisées pour l'étude des comportements hydrodynamiques des systèmes de particules à l'équilibre. Enfin, les méthodes de [67, 104] ont été adaptées aux modèles hors équilibre [54, 55, 71, 75, 58, 90].

Une autre question d'intérêt en physique est la dérivation d'équations aux dérivées partielles qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle, comme les équations de Navier-Stokes ; ces équations ne peuvent être obtenues comme limite hydrodynamique de systèmes de particules. Toutefois, différentes interprétations ont permis de développer des techniques permettant d'obtenir ces équations [43, 51, 52, 53, 78, 8, 7, 79, 6].

Une fois la limite hydrodynamique prouvée, des améliorations naturelles sont l'étude des fluctuations (théorème de la limite centrale) et des grandes déviations. Les livres [101, 69] fournissent une synthèse de quelques-uns de ces résultats pour les dynamiques à l'équilibre.

La théorie des grandes déviations a connu un grand développement suite aux travaux fondamentaux de Donsker & Varadhan [44, 45, 46, 47] pour les processus de Markov, et de Freidlin & Wentzell pour les perturbations aléatoires de systèmes dynamiques [60]. Depuis, elle a pris une place de plus en plus importante et ses techniques ont été très utilisées en mécanique statistique et pour les systèmes de particules en interaction. Les premiers résultats sur les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique pour des gaz sur réseau ont été introduits par Donsker & Varadhan [48] pour des modèles de diffusion comme le processus de Ginzburg-Landau, et par Kipnis, Olla & Varadhan [72] pour le processus d'exclusion simple symétrique. Les techniques utilisées dans ces articles ont été reprises et développées dans les livres de Kipnis & Landim [69] et de Spohn [101], où on trouvera également une bibliographie plus détaillée sur le sujet. Jusqu'alors, les fonctionnelles d'action (voir la sous-section 1.2) associées aux modèles considérés sont convexes et semi-continues inférieurement ; la convexité de la fonctionnelle d'action permet d'étendre plus simplement la borne inférieure des grandes déviations aux voisinages quelconques d'ouverts. Dans [96], Quastel, Rezakhanlou & Varadhan ont développé des techniques permettant d'obtenir un principe de grandes déviations pour des modèles où la fonctionnelle n'est pas convexe.

L'étude des grandes déviations pour les systèmes hors équilibres a connu une activité considérable ces dernières années. Les principales investigations ont porté sur les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique et les grandes déviations pour le courant. Les techniques de [48] et [72] ont été adaptées dans [13] pour établir un principe de grandes déviations dynamiques

(f. (1.2.2) et (1.2.3)) pour le modèle d'ex lusion simple symétrique en dimension 1, où la fon tionnelle d'a tion est onvexe. Notre ontribution aux grandes déviations dans les résultats ités dans e mémoire on erne l'extension des méthodes de [48, 72, 96] aux modèles hors équilibre et à longue portée pour lesquels les fon tionnelles ne sont pas onvexes, et pour des modèles hors équilibres en toutes dimensions.

Les résultats sur les grandes déviations dynamiques peuvent être utilisés pour déterminer la fon tionnelle des grandes déviations pour la mesure stationnaire hors équilibre (grandes déviations statiques). Dans e adre, une appro he ma ros opique a été introduite par Bertini, de Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio & Landim dans [11, 12] en utilisant les fon tionnelles d'a tion des grandes déviations dynamiques. Ils ont développé une théorie des flu tuations dynamiques qui permet de ara tériser la fon tionnelle de grandes déviations statiques par un prin ipe variationnel asso ié aux fon tionnelles dynamiques, et par des équations de Hamilton-Ja obi en dimension infinie. Une formule expli ite pour la fon tionnelle d'a tion a été obtenue pour une lasse de modèles en dimension 1 dans [38, 39, 18]. Par ailleurs, en suivant la stratégie de Freidlin & Wentzell [60], Bodineau & Gia omin [25] d'une part, et Farfan [57] d'autre part, ont ara térisé la fon tionnelle d'a tion statique dire tement par le quasi-potentiel asso ié aux fon tionnelles de grandes déviations dynamiques.

Un autre sujet d'intérêt dans les investigations autour des systèmes hors équilibre est l'étude du flux de l'énergie ou du flux de parti ules à travers le système. Dans e adre plusieurs arti les ont étudié les grandes déviations du ourant dans les systèmes de parti ules hors équilibre, voir [22, 23, 24, 14, 15, 17] et les référen es qui s'y trouvent.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante : dans la pro haine sousse tion, nous introduirons quelques systèmes de parti ules. Dans le hapitre 2, sont dé rits les résultats que j'ai obtenu sur les limites hydrodynamiques. Mes travaux on ernant les grandes déviations sont résumés et ommentés dans le hapitre 3.

1.2 Une brève description mathématique

Du point de vue probabiliste, le modèle sto hastique régissant l'évolution d'un système de parti ules sur un réseau S est un pro essus de Markov $(\omega_t)_{t\geq 0}$ d'espa e d'états $\mathsf{X} = X^{\mathsf{S}}$. La variable $t \in [0, +\infty)$ désigne le temps et à haque instant t, l'appli ation $\omega_t : S \to X$ représente l'état du système à et instant.

L'évolution d'un système de parti ules peut être dé rite informellement de la manière suivante : on munit haque site de S d'horloges exponentielles qui sont mutuellement indépendantes. Initialement des parti ules sont distribuées selon une loi de probabilité sur S, et à haque fois qu'une horloge sonne en un site $x \in S$, les parti ules présentes en e site sautent (s'é hangent, meurent, naissent, entrent en ollision, ...) selon des règles d'intera tions qui ara térisent le modèle. Ces règles sont définies par des probabilités de transition et par des taux qui dépendent du nombre de parti ules et de leur répartition dans un voisinage du site x.

Nous onsidérerons dans e mémoire trois types de pro essus : les modèles de sauts ou d'é hanges de parti ules entre les sites du réseau S, les pro essus de naissan es et de morts de parti ules, et enfin quelques modèles non onservatifs de spins de types Glauber et Blume-Capel, qui onsistent à é hanger les valeurs des spins ("spin-flips") sur haque site. Pour $x \in S$ et $t \geq 0$, $\omega_t(x)$ représente respe tivement le nombre de parti ules et la valeur du spin au site x à l'instant t. Lorsque $X = \mathsf{N}$, le nombre de parti ules par site est illimité, 'est le as du pro essus de zero-range introduit par Spitzer [99, 100] et étudié en volume infini par Andjel [1]. Si X est fini, le nombre de parti ules ne peut pas ex éder $|X|$ (pour un ensemble A, $|A|$ désigne le ardinal de A). Dans le as de modèles de sauts régis par une règle d'ex lusion, on parle de pro essus d'ex lusion généralisées ; le as parti ulier où $|X| = 2$ et le taux de saut est onstant s'appelle le pro essus d'ex lusion simple, qui est le plus souvent étudié (f. [99, 100, 82, 83], $\cdots$).

Formellement le pro essus de Markov $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est dé rit par son générateur infinitésimal $\mathcal{L}$, l'opérateur linéaire de domaine $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{L} f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta) , \tag{1.2.1}$$

où pour tout $x \in S$, $\mathcal{L}_x$ est la partie du générateur qui dé rit les mouvements et les transtions de parti ules (ou de spins) autour du site x. L'évolution temporelle du pro essus $(\omega_t)_{t \geq 0}$ est définie par le semi-groupe $\{S(t) \, , \, t \geq 0\}$ asso ié à l'opérateur $\mathcal{L}$. Nous avons les deux relations suivantes, pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $\omega \in \mathsf{X}$,

$$S(t) f(\omega) = \mathsf{E}^{\omega} \left[f(\omega_t) \right] , \quad \frac{d}{dt} S(t) f = S(t) \mathcal{L} f = \mathcal{L} S(t) f .$$

Ces dernières relations qui lient le générateur au semi-groupe sont les équations de Chapman-Kolmogorov.

La première question qui se pose naturellement est l'existen e de tels pro essus : lorsque l'espa e d'état X est fini, la onstru tion est garantie par la théorie des pro essus de Markov à espa es d'états finis (voir par exemple [84, 30]). Dans le as ontraire l'existen e d'une large lasse de pro essus a été démontrée par différentes méthodes de onstru tion [82, 30, 49, 83].

Une fois l'existen e du pro essus établie, se pose alors le problème de la ara térisation de ses mesures invariantes ou réversibles. Les mesures invariantes des systèmes à l'équilibre onsidérés dans e mémoire sont données par les mesures de Gibbs et sont réversibles. La réversibilité se traduit par le fait que le générateur est autoadjoint dans l'espa e L^2 muni du produit s alaire asso ié à la mesure de Gibbs. En revan he, pour les systèmes hors équilibre de réservoirs (qui maintiennent le système loin de l'équilibre), les mesures invariantes ne sont pas expli itement onnues, e qui rend les investigations plus diffi iles.

Le passage à la limite hydrodynamique a pour but de déterminer la des ription ma ros opique d'un gaz ou d'un fluide évoluant dans un volume V à partir d'une dynamique mi ros opique aléatoire [101, 69]. Au niveau ma ros opique, physiquement, le système est ara térisé par des variables $\rho^1, \cdots, \rho^k$. L'évolution de es variables est régie par un système d'équations aux dérivées partielles, dont la variable $\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^k)$ est onsidérée dans un espa e topologique V. L'évolution de ρ est dé rite par son semi-groupe $\{T(t) \ : \ t \geq 0\}$ défini sur son domaine $\mathbf{D} \subset \mathsf{V}$. Pour tout $t \geq 0$, $\rho_t = (\rho_t^1, \cdots, \rho_t^k) = T(t)\rho_0$ désigne l'état du système à l'instant t et $\rho_0 = (\rho_0^1, \cdots, \rho_0^k)$ est la ondition initiale.

Le omportement ma ros opique du système s'obtient après renormalisation en espa e et en temps du système mi ros opique. Le hangement d'é helle spatiale s'effe tue en dis rétisant le volume V. Au niveau mi ros opique, pour haque entier $N \geq 1$, un système de parti ules de générateur $\mathcal{L}_N$, évolue sur le volume mi ros opique V_N, où le paramètre de hangement d'é helle est N^{-1}. Le hangement d'é helle spatiale induit un hangement d'é helle temporelle $t \mapsto a_N\, t$, qui orrespond à une a élération du système de parti ules dans le temps par un fa teur a_N, qui dépend de N. La dynamique mi ros opique est alors donnée par un pro essus de Markov $(\omega_t)_{t\geq 0}$ de générateur $a_N \mathcal{L}_N$ et de semi-groupe $\{S_N(t) \ : \ t \geq 0\}$. On observe deux types de modèles : les modèles dits hyperboliques sont obtenus par les hangement d'é helle espa e-temps $(x, t) \mapsto (x/N, Nt)$, et les modèles dits paraboliques, ou diffusifs sont obtenus par le hangement d'é helle $(x, t) \mapsto (x/N, N^2 t)$.

Dans l'esprit probabiliste, la limite hydrodynamique peut se traduit par une onvergen e en loi : supposons qu'à haque onfiguration mi ros opique ω soit asso iée une variable aléatoire π^N qui ara térise le système, $\pi^N(\omega) = (\pi^{N,1}(\omega), \cdots, \pi^{N,k}(\omega))$. On dira que le omportement hydrodynamique est établi lorsqu'à partir d'un profil ma ros opique initial ρ_0 défini sur V et d'une suite de onfigurations mi ros opiques $(\omega^N)_{N\in\mathsf{N}}$ qui onverge en loi vers ρ_0 ; la suite de pro essus $\{(\pi^N(\omega_t^N))_{t\geq 0} \, : \, N \geq 1\}$ onverge en loi vers les traje toires déterministes $(T(t)\rho_0)_{t\geq 0}$.

La limite hydrodynamique peut être enri hie par l'existen e d'un prin ipe de grandes déviations : étant donné un profil ma ros opique ρ, on her he à estimer la probabilité asymptotique pour que les variables aléatoires π^N se trouvent dans un voisinage de ρ. Cette probabilité doit être exponentiellement petite, dans le sens où il existe une suite de réels $(r_N)_{N\in\mathsf{N}}$ appelée vitesse de onvergen e, et une fon tionnelle I appelée fon tionnelle d'a tion définie sur l'espa e topologique V, vérifiant les deux bornes suivantes :

1. *Borne supérieure.* Pour tout fermé F de V,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{r_N} \log \mathsf{P}^N \left(\pi^N \in F \right) \leq - \inf_{\in F} I(\pi)\,, \tag{1.2.2}$$

2. *Borne inférieure.* Pour tout ouvert O de V

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{r_N} \log \mathsf{P}^N \left(\pi^N \in O \right) \geq - \inf_{\in O} I(\pi)\,. \tag{1.2.3}$$

où P^N désigne la loi du pro essus $\left(\pi^N(\omega_t^N)\right)_{t\geq 0}$ et la suite $(r_N)_{N\in\mathsf{N}}$ est telle que $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$. La fon tionnelle I est semi- ontinue inférieurement ; si de plus, elle admet des ensembles de niveaux $(\{I \leq a\}, \quad a \in \mathsf{R})$ ompa ts, elle est dite une "bonne" fon tionnelle d'a tion.

1.3 Quelques systèmes de particules

Les systèmes de parti ules les plus fréquemment utilisés modélisent l'évolution d'un gaz sur un réseau ("sto hasti latti e gas"). Dans ette sous-se tion, nous allons dé rire quelques modèles ités dans la suite du mémoire.

On se pla e en dimension $d \geq 1$ et on fixe un entier N assez grand. Pour tout entier $k \geq 1$, on note T_N^k le tore dis ret k-dimensionnel de taille N. Suivant les modèles à étudier, l'ensemble des sites S peut désigner le tore T_N^d, le réseau Z^d, ou en ore le ylindre $\Omega_N = \{-N+1, \cdots, N-1\} \times \mathsf{T}_N^{d-1}$ de Z^d de hauteur $2N-1$ et de base T_N^{d-1}. Dans e dernier as, on note $\Gamma_N = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathsf{Z} \times \mathsf{T}_N^{d-1} \mid x_1 = \pm(N-1)\}$ le bord de Ω_N.

1.3.1 Modèles à l'équilibre

Nous décrivons brièvement ici les processus de zero-range, d'exclusion, de Kawasaki et celui de Glauber, et nous nous intéressons également aux modèles de Blume-Capel. Les taux de sauts de ces modèles satisfont aux conditions du bilan détaillé (en anglais “detailed balance conditions”), les mesures sont réversibles et données par la mesure de Gibbs.

Dans ce qui suit, $p : S \times S \to [0,1]$ est une probabilité de transition à portée finie, invariante par translation et spatialement ergodique et on note

$$p(x,y) = p(0, y-x) =: p(y-x), \quad \forall (x,y) \in S \times S\,. \tag{1.3.1}$$

Processus de zero-range. Cette dynamique est décrite par un processus de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathsf{X} = \mathsf{N}^{\mathsf{S}}$; pour chaque site $x \in S$, $\eta_t(x)$ désigne le nombre de particules présentes au site x à l'instant t. On considère une fonction $g : \mathsf{N} \to \mathsf{R}_+$ telle que $g(0) = 0$ et $g(k) > 0$ pour tout $k \geq 1$, appelée taux ou fonction de saut. Le mouvement des particules pour le processus de zero-range suit le mécanisme suivant : si le système est dans l'état $\eta \in \mathsf{X}$, le site x est occupé par $\eta(x)$ particules. Une particule va quitter x avec le taux $g(\eta(x))$, elle est éjectée vers un site y avec probabilité $p(x,y)$. Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ du processus de zero-range à taux $g(\cdot)$ et de probabilité de transition p peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta)\,, \tag{1.3.2}$$

où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{y \in S} p(x,y) g(\eta(x)) \left(f(\eta^{x,y}) - f(\eta) \right),$$

et pour $x, y \in S$, $\eta^{x,y}$ est la nouvelle configuration obtenue à partir de la configuration η après le saut d'une particule du site x au site y :

$$(\eta^{x,y})(z) := \begin{cases} \eta(x) - 1 & \text{si } z = x \\ \eta(y) + 1 & \text{si } z = y \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x, y\,. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

L'existence du processus de zero-range en volume infini est démontrée par Andjel dans [1]. Ses mesures invariantes sont caractérisées dans ce même article, elles sont données par une famille $(\nu_\rho)_{0 \leq \rho < \rho^*}$

où $g(0)! = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(k)! = g(1) \cdots g(k)$. La fon tion de renormalisation $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est donnée par la série entière

$$Z(\varphi) = \sum_{k \geq 0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{g(k)!}$$

et φ^* est son rayon de onvergen e.

Modèles d'exclusion. Ce pro essus de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ a pour espa e d'états $\mathbb{X} = \{0, \cdots, \kappa\}^S$, où $\kappa \geq 1$ est un entier fixé qui désigne le nombre maximum de parti ules par site. La règle de l'ex lusion est la suivante : lorsque le système est dans l'état $\eta \in \mathbb{X}$, le taux ave lequel un site $x \in S$ qui ontient au moins une parti ule éje te une parti ules vers un site y, qui ontient stri tement moins de κ parti ules est $p(x,y) r_{x,y}(\eta)$, où la fon tion $r_{x,y}(\eta)$ dépend des o upations des sites x,y et de leurs voisins. Lorsque $\eta(x) = 0$ ou $\eta(y) = \kappa$ le saut de x vers y est impossible.

Le générateur infinitésimal du pro essus de Markov $(\eta_t)_{t \geq}$ est défini par

$$\mathcal{L} f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta) ,$$

où

$$\mathcal{L}_x f(\eta) = \sum_{y \in S} p(x,y) r_{x,y}(\eta) \mathbb{1}_{\{\eta(x) > 0; \ \eta(y) < \kappa\}} \left[f(\eta^{x,y}) - f(\eta) \right] ,$$

ave $\eta^{x,y}$ définie dans (1.3.3). Nous nous intéresserons à trois types de es modèles :

- *La κ-exclusion symétrique.* C'est le as parti ulier où $r_{x,y} \equiv 1$ et la probabilité de transition p est symétrique et vérifie (1.3.1). Les mesures réversibles pour es modèles sont les mesures produit sur S paramétrées par $\varphi \geq 0$ et de marginales

$$\nu_\varphi(\eta \; ; \; \eta(x) = k) = \frac{\varphi^k}{1 + \varphi + \cdots + \varphi^\kappa} , \quad k \in \{0, \cdots, \kappa\} . \qquad (1.3.5)$$

- *L'exclusion simple.* C'est le as où $\kappa = 1$ et $r_{x,y} \equiv 1$, le taux de saut peut s'e rire $p(x,y)\eta(x)(1 - \eta(y))$. Le générateur est défini par

$$\mathcal{L} f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x f(\eta), \qquad (1.3.6)$$

où
$$\mathcal{L}_x f(\eta) \;=\; \sum_{y\in S} p(x,y)\eta(x)(1-\eta(y))\,\big[f(\eta^{x,y}) \;-\; f(\eta)\big]\;.$$

Remarquons qu'ici $\eta^{x,y}$ peut être définie comme la configuration $T^{x,y}\eta$ obtenue à partir de η après avoir échangé l'occupation du site x avec celle du site y :

$$(T^{x,y}\eta)(z) := \begin{cases} \eta(y) & \text{si } \; z = x \\ \eta(x) & \text{si } \; z = y \\ \eta(z) & \text{si } \; z \neq x, y\,. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Les mesures invariantes pour cette dynamique sont les mesures produit de Bernoulli définies dans (1.3.17) pour $\alpha \equiv 0$.

- *L'exclusion avec changement de vitesse.* Le taux de saut $r_{x,y}$ ne dépend pas que de l'occupation des deux sites x et y, mais aussi de celle des sites voisins de x et y. On considère le cas de sauts à plus proche voisin et pour simplifier la description on se place sur le tore $\mathbb{T}_N^d$. On note $(e_1,\ldots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

  Le cas que nous considérons ici est construit de telle sorte qu'il soit *gradient*, c'est-à-dire que le *courant de particules* à travers deux sites voisins $x, x+e_i$, défini par

$$W_{x,x+e_i}(\eta) = r_{x,x+e_i}(\eta) - r_{x+e_i,x}(\eta) \qquad 1 \le i \le d \tag{1.3.8}$$

  s'écrit comme la différence d'une fonction locale et de sa translatée. Pour $a > -1/2$, le taux de saut est

$$r_{x,x+e_i}(\eta) \;=\; 1 \;+\; a\,\big[\eta(x-e_i)+\eta(x+2e_i)\big]\;.$$

  Le générateur infinitésimal du processus de Markov est donné par

$$\mathcal{L}f(\eta) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \mathcal{L}_x f(\eta)\,. \tag{1.3.9}$$

  où

$$\mathcal{L}_x f(\eta) \;=\; \sum_{i=1}^{d} r_{x,x+e_i}(\eta)\,\big[f(T^{x,x+e_i}\eta) \;-\; f(\eta)\big]\;. \tag{1.3.10}$$

  Comme pour l'exclusion simple, les mesures invariantes pour cette dynamique sont les mesures produit de Bernoulli définies dans (1.3.17) avec $\alpha \equiv 0$.

- *L'exclusion simple faiblement asymétrique.* Il s'agit d'une perturbation de l'exclusion simple symétrique. Étant donnée une fonction régulière $h : S \to \mathbb{R}$, l'interaction locale entre les particules est déterminée par l'hamiltonien $H_{h,N}$ défini sur $\mathbb{X}$ par

$$H_{h,N}(\eta) \;=\; -\sum_{x\in S} h(x/N)\eta(x)\,.$$

  Le processus d'exclusion faiblement asymétrique perturbé par l'hamiltonien $H_{h,N}$ et à plus proche voisin sur S est défini par son générateur infinitésimal $\mathcal{L} = \sum_{x\in S}\mathcal{L}_x$, où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\substack{z\in S\\ |z|=1}} e^{-\frac{1}{2}\left(H_{h,N}(T^{x,x+z}\eta)-H_{h,N}(\eta)\right)}\left(f(T^{x,x+z}\eta)-f(\eta)\right),$$

  Le cas particulier que nous avons étudié dans l'article [20] (voir section 3), correspond à une fonction linéaire $h(u) = E\,u + \lambda$ pour deux réels fixés E et λ. L'asymétrie faible est de l'ordre E/N, le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_x f(\eta) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{x\in S}\sum_{\substack{z\in S\\ |z|=1}} e^{-E/2N\left(\eta(x+z)-\eta(x)\right)}\left(f(T^{x,x+z}\eta)-f(\eta)\right). \tag{1.3.11}$$

Un modèle avec désordre : *l'exclusion avec champ extérieur aléatoire.* On définit un espace d'environnements $\left(E_a, \mathcal{B}, \mathbf{P}\right)$, où $E_a = [-a,a]^S$ pour un réel $a > 0$. On suppose que $\mathbf{P}$ est une probabilité produit et stationnaire. On notera $(\alpha(x))_{x\in S} \in E_a$ une configuration typique de E_a (c'est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées) appelée champ magnétique. Ce modèle décrit l'évolution d'un système de particules avec au plus une particule par site. L'espace d'états est $\mathbb{X} = \{0,1\}^S$.

Étant donnée une réalisation $\alpha \in E_a$ du champ magnétique, l'interaction locale entre les particules est déterminée par l'hamiltonien H_α défini sur $\mathbb{X}$ par

$$H_\alpha(\eta) = -\sum_{x\in S}\alpha(x)\eta(x)\,. \tag{1.3.12}$$

Le processus d'exclusion avec désordre, symétrique et à plus proche voisin sur S est défini par son générateur infinitésimal $\mathcal{L} = \sum_{x\in S}\mathcal{L}_x$, où pour tout $x \in S$,

$$\mathcal{L}_x f(\eta) \;=\; \sum_{\substack{z\in S\\ |z|=1}} C_\alpha(x,x+z;\eta)\left(f(T^{x,x+z}\eta)-f(\eta)\right), \tag{1.3.13}$$

$T^{x,y}\eta$ est définie par (1.3.7) et les taux $C\ (x, x+z; \eta)$ par

$$C\ (x, x+z;\eta) = \Phi\ \ H\ (T^{x,x+z}\eta) - H\ (\eta)\ \ .$$

La fon tion Φ est régulière, elle satisfait $\Phi(0) = 1$ et *la relation du bilan détaillé*

$$\Phi(E) = \exp(-E)\Phi(-E)\,. \tag{1.3.14}$$

La probabilité de transition p définie par (1.3.1) est donnée dans e as par $p(z) = 1/(2d)$, pour tout $z \in S$, $|z| = 1$. D'autre part, la relation (1.3.14) est équivalente à l'existen e d'une fon tion ψ régulière telle que

$$\Phi(E) = \exp(-E/2)\psi(E), \qquad \psi(E) = \psi(-E), \qquad \psi(0) = 1\,.$$

Le as le plus utilisé dans la littérature est

$$\Phi(E) \,=\, \exp(-E/2)\,, \tag{1.3.15}$$

'est aussi e as que nous onsidérons.

Pour tout paramètre $\lambda > 0$, on note $\mu^{\ ;\ }$ la mesure de Gibbs sur X asso iée à l'hamiltonien H , de potentiel himique λ :

$$\mu^{\ ;\ }(\eta) = \frac{1}{Z^{\ ;\ }}\exp\{-H\ (\eta) + \lambda\sum_{x\in S}\eta(x)\}\,, \qquad \eta\in\mathsf{X}\,, \tag{1.3.16}$$

où $Z^{\ ;\ }$ est la onstante de normalisation. Remarquons que $\mu^{\ ;\ }$ n'est autre qu'une mesure produit de Bernoulli sur X,

$$\mu^{\ ;\ }\ \eta(x) = 1\ \ = \frac{e^{\ (x)+}}{1 + e^{\ (x)+}} \,=\, 1 - \mu^{\ ;\ }\ \eta(x) = 0\ \ , \tag{1.3.17}$$

pour tout $x \in S$. D'autre part, la relation (1.3.14) assure la réversibilité de es mesures par rapport au générateur $\mathcal{L}$: pour tous $f, g \in \mathcal{S}$

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle_{\ \alpha,\lambda} \,:=\, \sum_{\in S}\mu^{\ ;\ }(\eta)f(\eta)\mathcal{L}g(\eta) \,=\, \langle\mathcal{L}f, g\rangle_{\ \alpha,\lambda}\ ,$$

où $<\cdot,\cdot>_{\ \alpha,\lambda}$ désigne le produit s alaire de $L^2(\mu^{\ ;\ })$. Lorsque la réalisation α est onstante, on retrouve l'ex lusion simple symétrique.

1.3.2 Modèles à longue portée

Il s'agit i i de modèles d'ex lusion ou de spins perturbés par un potentiel d'intera tion de Ka . Fixons un entier N assez grand. Un potentiel de Ka est une fon tion $J_N(\cdot)$ définie sur R^d telle que

$$J_N(u) \;=\; N^{-d} J(u/N), \quad \text{pour tout } u \in \mathsf{R}^d\,, \tag{1.3.18}$$

où $J \in \mathcal{C}^2(\mathsf{R}^d)$ est une fon tion symétrique, positive, à support ompa t dans la boule unité et normalisée, 'est-à-dire $\int_{\mathsf{R}^d} J(u)du = 1$.

Le potentiel d'intera tion de Ka a été introduit dans [68] et généralisé dans [81] afin de fournir une analyse rigoureuse de la théorie de transition de phase de Van der Waals. Depuis, la littérature sur le sujet est devenue importante. Citons seulement quelques résultats sur l'évolution ma ros opique des dynamiques onservatives [64, 65, 66, 85] ou non- onservatives [31, 33, 85, 9]. L'étude pour N grand mais fixé a aussi fait l'objet de plusieurs arti les, nous en itons quelques-uns où le modèle ave hamp extérieur aléatoire a été onsidéré [26, 21, 29, 80, 27, 28]. Nous renvoyons au livre de E. Presutti [94] pour une étude synthétique et bibliographique.

Nous onsidérons dans ette se tion les modèles ave potentiel de Ka sur le tore ou sur Z^d. Une autre version du potentiel de Ka pour des modèles qui évoluent sur un domaine borné ave réservoirs est définie dans la se tion 3 (f. [34, 91]).

Modèle d'exclusion avec désordre soumis au potentiel d'interaction de Kac. On se pla e sur le tore $S = \mathsf{T}_N^d$. On reprend le modèle d'ex lusion ave désordre dé rit dans la sous-se tion 1.3.1. Étant donné une réalisation $\alpha \in E_a$ du hamp magnétique et un paramètre $\beta > 0$ qui désigne l'inverse de la température $T = 1/\beta$, on définit l'hamiltonien $H_N^{;}$ sur X par la somme de deux hamiltoniens :

$$H_N^{;}(\eta) = \beta H_N(\eta) + H(\eta)\,, \tag{1.3.19}$$

où H représente l'intera tion lo ale définie par (1.3.12) et H_N est l'intera tion de longue portée de Ka donnée par

$$H_N(\eta) \;=\; -\frac{1}{2} \sum_{(x;y)\in S\times S} J_N(x-y)\eta(x)\eta(y)\,.$$

Notons $\mu_N^{;\,;}$ les mesures de Gibbs sur X asso iées à l'hamiltonien $H_N^{;}$ de potentiel himique $\lambda \in \mathsf{R}$ et à température $T = \beta^{-1}$:

$$\mu_N^{;\,;}(\eta) = \frac{1}{Z_N^{;\,;}} \exp\{-H_N^{;}(\eta) + \lambda \sum_{x\in S} \eta(x)\} \qquad \eta \in \mathsf{X}\,, \tag{1.3.20}$$

où $Z_N^{;\,;}$ est le facteur de normalisation.

La dynamique d'exclusion (ou de Kawasaki) avec désordre à l'inverse de température $\beta > 0$ est le processus de Markov sur X défini par son générateur $\mathcal{L}^{N;\,;}$, agissant sur les fonctions $f : \mathsf{X} \to \mathsf{R}$ par

$$\mathcal{L}^{N;\,;} f(\eta) = \sum_{x \in S} \mathcal{L}_x^{N;\,;} f(\eta) , \tag{1.3.21}$$

où

$$\mathcal{L}_x^{N;\,;} f(\eta) = \sum_{\substack{z \in S \\ |z|=1}} C_N^{;}(x, x+z; \eta) \left[f(T^{x,x+z}\eta) - f(\eta) \right] \tag{1.3.22}$$

et les taux $C_N^{;}(x, x+z; \eta)$ sont définis par

$$C_N^{;}(x, x+z; \eta) = \Phi \left\{ H_N^{;}(T^{x,x+z}\eta) - H_N^{;}(\eta) \right\} ,$$

où $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathsf{R}, (0, \infty))$ est définie comme dans (1.3.14). Les mesures $\mu_N^{;\,;}$ sont réversibles pour le générateur $\mathcal{L}_N^{;}$.

Un modèle non conservatif avec désordre. Il s'agit d'un modèle de spin-flip, où les valeurs possibles des spins sont $+1$ et -1, appelé modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire.

On se place en dimension $d \geq 1$, sur $S = \mathsf{T}_N^d$. On définit un espace d'environnements $(E, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, avec une probabilité $\mathbf{P}$ qu'on suppose stationnaire. On notera encore $\alpha = (\alpha(x))_{x \in S} \in E$ une configuration typique de E.

On se donne un réel $\beta > 0$ et une réalisation du champ magnétique $\alpha \in E$. Le modèle de Glauber avec potentiel de Kac et avec champ extérieur aléatoire, à température $1/\beta$, est un processus de Markov sur l'espace d'états $\mathsf{X} = \{-1, 1\}^{\mathsf{T}_N^d}$ défini par son générateur infinitésimal

$$\mathsf{L}_N^{;} f(\sigma) = \sum_{x \in \mathsf{T}_N^d} \mathsf{L}_{N,x}^{;} f(\sigma) = \sum_{x \in \mathsf{T}_N^d} c_N^{;}(x, \sigma) [f(\sigma^x) - f(\sigma)], \tag{1.3.23}$$

où pour $\sigma \in \mathsf{X}$, $x \in \mathsf{T}_N^d$,

$$c_N^{;}(x, \sigma) = \frac{\exp[-(1/2)(H_N^{;}(\sigma^x) - H_N^{;}(\sigma))]}{2 \cosh[(1/2)(H_N^{;}(\sigma^x) - H_N^{;}(\sigma))]} ,$$

σ^x est définie par

$$(\sigma^x)(z) := \begin{cases} -\sigma(x) & \text{si } z = x , \\ \sigma(z) & \text{si } z \neq x , \end{cases} \tag{1.3.24}$$

et l'hamiltonien $H_N^{;}$ est défini par la formule (1.3.19). On onsidère la mesure de Gibbs asso iée à l'hamiltonien $H_N^{;}$ définie dans (1.3.20) ave $\lambda = 0$:

$$\mu_N^{;}(\sigma) = \frac{1}{Z_N^{;}} \exp\{-H_N^{;}(\sigma)\} \qquad \sigma \in \mathsf{X}\,, \tag{1.3.25}$$

où $Z_N^{;}$ est le fa teur de normalisation. On vérifie que $\mu_N^{;}$ satisfait à la ondition (1.3.14) et par onséquent l'opérateur $\mathsf{L}_N^{;}$ est autoadjoint dans $L^2(\mu_N^{;})$.

Modèles de Blume-Capel soumis au potentiel de Kac. On se pla e sur $S = \mathsf{Z}^d$ et on fixe un entier N assez grand. Le modèle de Blume-Capel est un modèle de spins prenant les valeurs $-1, 0, +1$. L'ensemble des onfigurations est $\mathsf{X} = \{-1, 0, +1\}^S$ et la variable du spin, pour haque onfiguration $\sigma \in \mathsf{X}$ en haque site x, est notée $\sigma(x)$. L'intera tion de Ka est définie par

$$H_{N;J}(\sigma) \;=\; -\frac{1}{2} \sum_{(x;y)\in S\times S} J_N(x-y)\sigma(x)\sigma(y) \;-\; \lambda_1 \sum_{x\in S} \sigma(x) \;-\; \lambda_2 \sum_{x\in S} \sigma^2(x)\,, \tag{1.3.26}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux paramètres réels.

On distingue deux modèles de Blume-Capel (BCM) : une dynamique onservative de type Kawasaki, qui é hange les valeurs des spins entre les sites, et une se onde dynamique non onservative de type Glauber.

Modèle conservatif. On se pla e dans le adre des é hanges de spins entre sites à plus pro he voisin. Le pro essus de Blume-Capel onservatif de paramètre $\beta \geq 0$ est le pro essus de Markov sur X défini par son générateur $\mathcal{L}_N^{;}$, agissant sur les fon tions $f \in \mathcal{S}$ par

$$\mathcal{L}_N^{;} f \;(\sigma) = \sum_{x\in S} \; ⅋ \sum \; z \; \mathrm{J} \qquad ⱡ$$

La dynamique de Kawasaki possède deux quantités onservées, les moyennes empiriques de σ et de σ^2, orrespondant respe tivement à la magnétisation lo ale et à la on entration lo ale. Les mesures invariantes de Gibbs seront don paramétrées par deux potentiels himiques.

Les mesures invariantes pour la dynamique lorsque $\beta = 0$ jouent un rôle important dans l'étude du omportement hydrodynamique. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$ le sous-réseau de $\mathbb{Z}^d$ de taille $(2n+1)^d$, $\Lambda_n = \{-n, \cdots, n\}^d$. Pour $A = (a, b) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, soit $\bar{\nu}_A$ la mesure produit sur $\mathbb{X} = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ de potentiel himique A telle que pour tout entier naturel $n \geq 1$, la restri tion $\bar{\nu}_{A;n}$ de $\bar{\nu}_A$ à $\{-1, 0, 1\}^{\Lambda_n}$ soit égale à

$$\bar{\nu}_{A;n}(\sigma) = Z_{A;n}^{-1} \exp\Big\{ a \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma(i) + b \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma^2(i) \Big\}, \tag{1.3.27}$$

où $Z_{A;n}$ est la onstante de normalisation. La olle tion $(\bar{\nu}_A)_{A \in [-1,1] \times [0,1]}$ forme une famille de mesures de probabilité réversibles pour la dynamique de Blume-Capel de type Kawasaki pour $\beta = 0$.

Modèle non conservatif. Pour tout site $x \in \mathbb{Z}^d$ et toute fon tion $f \in \mathcal{S}$, posons

$$\big(\nabla_x^{\pm} f\big)(\sigma) = \big[f(\sigma^{\pm;x}) - f(\sigma) \big],$$

où la onfiguration $\sigma^{\pm;x}$ est obtenue à partir de σ en é hangeant la valeur du spin $\sigma(x)$ au site x omme suit :

$$(\sigma^{\pm;x})(z) := \begin{cases} \sigma(x) \pm 1 \bmod 3 & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si } z \neq x\,. \end{cases}$$

Le générateur de la dynamique de Blume-Capel, de type Glauber, est donné par

$$\big(\mathbb{L}_N^{G;} f\big)(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} C_N^{G;\pm}(x;\sigma) \Big[\big(\nabla_x^{\pm} f\big)(\sigma) \Big], \tag{1.3.28}$$

où les taux $C_N^{G;\pm}(x;\sigma)$ sont définis par

$$C_N^{G;\pm}(x;\sigma) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \exp\big(\beta\, \nabla_x^{\pm} H_{N;J}\big)}.$$

Remarquons que la fon tion $\Phi(E) = \frac{1}{2}\big(1 + \exp E\big)^{-1}$ définissant les taux de flips vérifie la ondition du bilan détaillé (1.3.14).

Pour l'existen e et la onstru tion de es pro essus de Blume-Capel, nous renvoyons à [82].

1.3.3 Modèles hors équilibres

Modèle avec réservoirs. Il s'agit i i des pro essus qui évoluent sur un domaine borné ave des réservoirs de parti ules au bord. On se pla e sur un ylindre et on note Γ_N le bord de Ω_N. Nous onsidérons la superposition de deux dynamiques, de générateur qui s'é rit sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_b\,. \tag{1.3.29}$$

La première dynamique dé rit l'évolution des parti ules à l'intérieur du domaine Ω_N, généralement par un des modèles dé rits dans le paragraphe 1.3.1. La se onde dynamique modélise l'a tion des réservoirs au bord, elle onsiste à imposer une densité égale à une fon tion $b(\cdot)$ définie au voisinage du bord Γ_N, et son générateur est noté $\mathcal{L}_b$. C'est une dynamique de naissan es et de morts de parti ules, onstruite de telle façon que sa mesure invariante soit de densité imposée égale à $b(\cdot)$.

Processus de sauts, de naissances et de morts. D'autres modèles mi ros opiques dont on ne onnait pas expli itement les mesures invariantes et qui ont un grand intérêt sont les pro essus de sauts, de naissan es et de morts. Ils sont également dé rits sur l'éspa e des sites S par la superposition de deux dynamiques, les générateurs sont de type (1.3.29). Contrairement aux modèles pré édents, les deux parties $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_b$ agissent sur la totalité de l'espa e S.

On se pla e sur le tore dis rétisé T_N^d, l'espa e d'état est $\mathsf{X} = \mathsf{N}^{\mathsf{T}_N^d}$. Les parti ules évoluent selon des mar hes aléatoires symétriques indépendantes, et sujettes à naissan es et morts : nous fixons $p \in \mathsf{N}$, en haque site x, l parti ules ($l \leq p$) peuvent être réées ave un taux de naissan e $b_l(\eta(x))$ ou une parti ule peut mourir ave un taux $d(\eta(x))$, où $(b_l(.))_{1\leq l\leq p}$ et $d(.)$ sont des fon tions définies sur N vérifiant $b_l(0) = d(0) = 0$ et $\eta(x)$ désigne le nombre de parti ules présentes au site x. Pour obtenir une équation hydrodynamique, qui tienne ompte des sauts de parti ules nous a élérons les sauts de parti ules par N^2. Le générateur du système de parti ules s'é rit sous la forme

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^N f)(\eta) &= N^2(\mathcal{L}_0^N f)(\eta) + (\mathcal{L}_p^N f)(\eta)\\ &= \sum_{x\in\mathsf{T}_N^d} N^2(\mathcal{L}_{0;x}^N f)(\eta) + (\mathcal{L}_{p;x}^N f)(\eta)\ ,\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

où pour tout $x \in \mathbb{T}_N^d$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{0,x}^N f)(\eta) &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{T}_N^d \\ |z|=1}} \eta(x) \left[f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta) \right] , \\
(\mathcal{L}_{p,x}^N f)(\eta) &= \sum_{l=1}^{p} b_l(\eta(x)) \left[f(\eta^{x,+l}) - f(\eta) \right] \\
&\quad + d(\eta(x)) \left[f(\eta^{x,-}) - f(\eta) \right] ,
\end{aligned}
\tag{1.3.31}
$$

pour tous $\eta \in \mathsf{X}$, $x, y \in \mathbb{T}_N^d$,

$$
\eta^{x,+l}(z) := \begin{cases} \eta(x) + l & \text{si } z = x \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x . \end{cases}
$$

$$
\eta^{x,-}(z) := \begin{cases} \eta(x) - 1 & \text{si } z = x \\ \eta(z) & \text{si } z \neq x \end{cases}
$$

et $\eta^{x,y}$ est définie par (1.3.3).

Ces modèles donnent par passage à la limite hydrodynamique des équations de *réaction-diffusion*.

Chapitre 2

Les limites hydrodynamiques

Mathématiquement, la limite hydrodynamique se traduit par une onvergen e en loi (voir se tion 1.2). On ren ontre deux types de modèles, les modèles gradient et les modèles non gradient. Un modèle est dit gradient lorsque le ourant mi ros opique entre deux sites voisins x et y (i.e. la différen e entre le taux de saut -ou d'é hange- d'une parti ule de x vers y et le taux de saut de y vers x) s'exprime omme la différen e d'une fon tion mi ros opique lo ale et de sa translatée. La dérivation de la limite hydrodynamique pour les systèmes onservatifs né essite d'établir les “lemmes de rempla ement” (estimées de blo s) qui permettent de rempla er ette fon tion lo ale par une fon tion de la densité empirique. Pour les modèles non gradient, le ourant n'étant pas différen e d'une fon tion et de sa translatée, l'étape ru iale pour établir la limite hydrodynamique est de démontrer le rempla ement du ourant mi ros opique par le gradient dis ret d'une fon tion du hamp de la densité empirique.

Il existe deux méthodes pour établir une limite hydrodynamique, toutes les deux introduites pour des modèles à l'équilibre évoluant sur le tore. La première méthode, dite de *production d'entropie*, a été introduite par Guo, Papani olaou & Varadhan [67] pour les modèles gradient. Elle repose sur l'étude de l'évolution temporelle de l'entropie et de la forme de Diri hlet de l'état du système par rapport à ertaines mesures de référen e qui orrespondent à des états pro hes de l'équilibre. Cette méthode a été généralisée aux systèmes non gradient par Varadhan dans [103] et Quastel dans [95].

La se onde méthode, dite *d'entropie relative* a été introduite par Yau [105]. Elle onsiste à étudier l'évolution temporelle de l'entropie par rapport à des mesures produit dont le paramètre est solution de l'équation hydrodynamique. Cette méthode né essite la régularité des solutions de l'équation hydrodynamique.

Ces méthodes ont été adaptées aux modèles hors équilibre avec réservoirs pour établir les comportements hydrodynamiques, voir par exemple [32, 54, 55, 71, 13, 17, 75, 7] et les références qui s'y trouvent.

Pour tout entier $k \geq 1$, notons $\mathbb{T}_N^k$ le tore discret k-dimensionnel de taille N. Considérons un processus de Markov $(\eta_t)_{t\geq 0}$ qui décrit l'évolution d'un système de particules (cf. section 1.3) en volume fini ($S = \mathbb{T}_N^d$ ou $S = \{-N+1, \cdots, N-1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$). Soient μ, ν deux mesures de probabilité sur l'espace d'états X telles que μ soit absolument continue par rapport à ν, de densité f. L'entropie de μ par rapport à ν est définie par

$$H[\mu|\nu] \;=\; H[f] \;=\; \int_{\mathsf{X}} f(\eta)\log(f(\eta))d\nu(\eta)\,. \tag{2.0.1}$$

C'est une fonction semi-continue supérieurement, positive, nulle seulement si $f \equiv 1$ et elle coïncide avec la forme variationnelle

$$H[\mu|\nu] \;=\; \sup_{U\in C_b(\mathsf{X})} \left\{ \int U(\eta)d\mu(\eta) - \log \int \exp\left(U(\eta)\right) d\nu(\eta) \right\}, \tag{2.0.2}$$

où $C_b(\mathsf{X})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur X.

De la forme (2.0.2) de l'entropie découlent deux inégalités importantes dites *inégalités entropiques* : pour toute fonction continue bornée U et pour tout $\gamma > 0$

$$\int U(\eta)d\mu(\eta) \leq \frac{1}{\gamma}\log \int \exp\left(\gamma U(\eta)\right) \mathrm{d}\nu(\eta) + \frac{1}{\gamma}H[\mu|\nu]; \tag{2.0.3}$$

pour un ensemble mesurable A,

$$\mu(A) \leq \frac{\log 2 + H[\mu|\nu]}{\log\left[1+\frac{1}{\nu(A)}\right]}\,. \tag{2.0.4}$$

De même, si $(\eta_t)_{t\geq 0}$ et $(\xi_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Markov sur l'espace d'états X, de lois respectives P_N et $\tilde{\mathsf{P}}_N$, telles que P_N soit absolument continue par rapport à $\tilde{\mathsf{P}}_N$, l'entropie de P_N par rapport à $\tilde{\mathsf{P}}_N$ est définie par

$$H[\mathsf{P}_N|\tilde{\mathsf{P}}_N] \;=\; \int_{\mathsf{X}} \frac{d\mathsf{P}_N}{d\tilde{\mathsf{P}}_N} \log\left(\frac{d\mathsf{P}_N}{d\tilde{\mathsf{P}}_N}\right) d\tilde{\mathsf{P}}_N\,,$$

où $\frac{d\mathsf{P}_N}{d\tilde{\mathsf{P}}_N}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de P_N par rapport à $\tilde{\mathsf{P}}_N$.

Ce chapitre décrit mes travaux sur les limites hydrodynamiques. Les modèles étudiés sont classés en trois catégories : hors équilibre avec réservoirs, à longue portée, non conservatifs, et enfin en volume infini.

2.1 Modèles hors équilibre avec réservoirs

On se pla e en dimension $d \geq 1$ et on fixe un entier N qui va tendre vers l'infini dans l'étude de l'hydrodynamique ou des grandes déviations. Pour fixer les idées on se pla e dans un ylindre $\Omega_N = \{-N+1, \cdots, N-1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$ de $\mathbb{Z}^d$ de taille $2N-1$ et de base $\mathbb{T}_N^{d-1}$. On note $\Gamma_N = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}_N^{d-1} \mid x_1 = \pm(N-1)\}$ le bord de Ω_N. Le domaine Ω_N désigne l'espa e mi ros opique sur lequel évoluent les parti ules. Le omportement hydrodynamique du système est dé rit sur l'espa e ma ros opique $\Omega = (-1,1) \times \mathbb{T}^{d-1}$, où $\mathbb{T}^{d-1}$ represente le tore de dimension $d-1$. On désigne par Γ le bord de Ω. Les éléments de Ω_N seront notés par les lettres $x, y, \dots$ et eux de Ω par $u, v, \dots$.

Les modèles sto hastiques de gaz sur réseau ave réservoirs peuvent être onstruits de la manière suivante. On fixe une fon tion $b(\cdot)$ définie sur le bord Γ de Ω et un profil de densité $\gamma(\cdot)$ défini sur Ω et dont la tra e sur Γ est égale à la fon tion b. On onsidère une des dynamiques dé rites dans la sous-se tion 1.3.1 de générateur $\mathcal{L}_0$ et on suppose que la probabilité de transition $p(\cdot,\cdot)$ est symétrique et à plus pro he voisin. Les équations hydrodynamiques que nous étudions sont alors obtenues sous le hangement d'é helle diffusif $(x,t) \mapsto (x/N, tN^2)$.

Les systèmes ave réservoirs sont onstitués de la supérposition de deux dynamiques, ils admettent pour générateurs des opérateurs linéaires de la forme

$$N^2 \mathcal{L} = N^2 \mathcal{L}_0 + N^2 \mathcal{L}_b \,. \tag{2.1.1}$$

La dynamique du générateur $N^2\mathcal{L}_0$ dé rit les mouvements de parti ules à l'intérieur du domaine Ω_N, et la se onde dynamique du générateur $N^2\mathcal{L}_b$ modélise les réservoirs au bord de Ω_N, voir la sous-se tion 1.3.3.

On s'intéresse au omportement limite des mesures empiriques de répartition de parti ules définies par

$$\pi_t^N(\eta) = N^{-d} \sum_{x \in \Omega_N} \eta_t(x) \delta_{x/N} \in \mathcal{M}_+(\Omega) \,, \tag{2.1.2}$$

où, pour tout u, δ_u est la masse de Dira au point u et $\mathcal{M}_+(\Omega)$ est l'ensemble des mesures positives sur Ω.

Plusieurs arti les sont onsa rés aux omportements hydrodynamique et hydrostatique des modèles hors équilibres [62, 32, 54, 55, 71]. Pour ertains modèles ave réservoirs, la mesure stationnaire peut être al ulée expli itement, 'est le as des modèles de zero-range. L'étude de l'hydrostatique se ramène alors au as des modèles lassiques à l'équilibre. Dans e adre, le omportement hydrodynamique pour des systèmes ave réservoirs à été prouvé en dimension 1 dans [32] pour le modèle de zero-range.

En général, la mesure stationnaire hors équilibre n'est pas onnue expli itement, 'est le as même de l'ex lusion simple. La méthode d'entropie [67] a été adaptée pour es modèles gradient en dimension 1, par [54] et [55], d'abord partant d'une mesure asso iée à un profil de densité initiale ρ_0, puis partant de l'unique mesure stationnaire (*limite hydrostatique*). Ces résultats ont été étendus aux modèles non gradient, en dimension 1 dans [71].

Cette partie regroupe les résultats que nous avons obtenu sur les omportements hydrodynamiques des systèmes hors équilibre. Nous avons étudié les modèles non gradient et les modèles en milieu aléatoire en toute dimension. Nous nous sommes également intéréssé à la dérivation des équations qui ne sont pas invariantes par hangement d'é helle, de type équations de Navier-Stokes (*limite incompréssi le*).

• *Systèmes non gradient.* Dans [75], en ollaboration ave C. Landim et S. Sellami, nous avons étudié le omportement hydrodynamique pour un système non gradient en toute dimension. Le générateur de la dynamique s'é rit omme 2.1.1, où $\mathcal{L}_0$ est le générateur de la κ-ex lusion symétrique, $\mathcal{L}_b$ est la partie du générateur qui modélise les réservoirs. Les équations hydrodynamiques obtenues sont de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \nabla \cdot \; D(\rho)\nabla\rho \;\; , \\ \rho(0,\cdot) = \;\rho_0(\cdot)\, , \\ \rho(t,\cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma\, , \end{cases} \tag{2.1.3}$$

où l'opérateur ∇ désigne le gradient, $\rho_0(\cdot)$ est le profil initial de densité et $b(\cdot)$ est la densité imposée au bord (voir se tion 1.3.3). Le omportement hydrodynamique pour e modèle a été étudié sur le tore dans [70], puis ave réservoirs en dimension un dans [71], où une formulation variationnelle de la matri e D a été donnée via la *formule de Green-Ku o*. Les oeffi ients de diffusion $\{D_{i;j}\;, 1 \le i, j \le d\}$ dépendent des propriétés statistiques du modèle, avant d'en donner l'expression variationnelle nous avons besoin de quelques notations. Les mesures invariantes pour la κ-ex lusion symétrique sont données par (1.3.5). Soit $\Phi : [0,\kappa] \to \mathsf{R}_+$ la fon tion qui permet de les reparamétrer de sorte que

$$\int_X \eta(x) d\nu_{(\;\;)}(\eta) \;=\; \rho \quad \text{pour } x \text{ dans } \Omega_N\, .$$

Pour toute fonction cylindrique $g : X = \{0, \dots, \kappa\}^{Z^d} \to R$, on note formellement $\Gamma_g(\eta) = \sum_{z \in Z^d} \tau_z g$ et $\nabla_{0,e_i} g(\eta) = g(\eta^{0,e_i}) - g(\eta)$, où $\{e_1, \cdots, e_d\}$ est la base canonique de R^d. La matrice de diffusion D est symétrique, elle est déterminée par la formule suivante :

$$a \cdot D(\rho)a \;=\; \frac{1}{2\chi(\rho)} \inf_g \sum_{i=1}^{d} \int_X \Big(a_i r_{0,e_i} + \nabla_{0,e_i}\Gamma_g \Big)^2 d\nu_{(\rho)}(\eta) \tag{2.1.4}$$

où pour $a, b \in R^d$, $(a \cdot b)$ est le produit scalaire dans R^d et $\chi(\rho)$ désigne *la compressibilité* définie par

$$\chi(\rho) \;=\; \int_X \eta(0)^2 d\nu_{(\rho)}(\eta) \;-\; \Big(\int_X \eta(x) d\nu_{(\rho)}(\eta) \Big)^2 .$$

La formule variationnelle rend la manipulation de cette matrice délicate, cependant des investigations concernant la régularité des coefficients de diffusion ont fait l'objet de nombreux travaux [76, 77, 10].

Voir aussi (2.1.13), où la formule de Green-Kubo est donnée pour un modèle non-gradient avec désordre.

• *Limites hydrostatiques.* Dans [58], en collaboration avec J. Farfan et C. Landim, nous avons prouvé la limite hydrostatique en toute dimension et nous en avons déduit la loi de Fick (cf. (2.1.7) ci-desous). Nous avons considéré le processus d'exclusion avec changement de vitesse, la dynamique microscopique à l'intérieur du domaine est alors donnée par (1.3.10). La dynamique au bord Γ_N du domaine est choisie de telle sorte que le générateur $\mathcal{L}_b$ soit réversible par rapport à la mesure produit de Bernoulli $\nu_N^{(\cdot)}$ de paramètre γ, où $\gamma(\cdot)$ est une fonction définie sur un voisinage de Γ dont la réstriction à Γ est $b(\cdot)$.

En adaptant la stratégie de [67], nous avons commencé par montrer que si initialement les particules sont distribuées suivant un profil de densité $\rho_0 : \Omega \to [0, 1]$, les mesures empiriques de répartition de particules convergent faiblement vers la solution d'une équation non linéaire avec condition de Dirichlet et condition initiale ρ_0 de type

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta\varphi(\rho)\,, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot)\,, \\ \rho(t, \cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma\,, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

Le comportement hydrostatique décrit l'asymptotique sous les mesures stationnaires μ_{ss}^N. Les mesures empiriques convergent vers la solution de l'équation stationnaire $\bar{\rho}$, associée à l'équation hydrodynamique (2.1.5) :

$$
\begin{cases} \Delta\varphi(\bar{\rho}) \,=\, 0\,, \\ \bar{\rho}(\cdot) = b(\cdot) \text{ sur } \Gamma\,. \end{cases} \tag{2.1.6}
$$

Nous obtenons la limite hydrostatique en étudiant trois copies du processus : la première part d'un profil de densité constante égal à 0, la seconde part de l'état stationnaire du système, et la troisième part d'un profil de densité constant égale à 1. La première étape consiste à montrer que lorsque $N \uparrow \infty$, les mesures empiriques de la seconde copie convergent vers la solution faible de l'équation hydrodynamique, mais sans condition initiale connue. D'autre part, on montre que pour tout profil initial $0 \le \gamma \le 1$, la solution ρ_t de (2.1.5) est bornée inférieurement (resp. supérieurement) par les solutions ρ_t^0 (resp. ρ_t^1), de (2.1.5) avec condition initiale égale à 0 (resp. 1). On prouve ensuite que ρ_t^0 et ρ_t^1 convergent lorsque $t \uparrow \infty$, vers le profil stationnaire $\bar{\rho}$. Le comportement hydrostatique est obtenu finalement par la stationnarité des mesures μ_{ss}^N. La *loi de Fick* est ensuite obtenue par un corollaire immédiat du comportement hydrostatique du système : pour tout $-1 < u < 1$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} E^{\mu_{ss}^N}\Big[\frac{2N}{N^{d-1}} \sum_{y\in\mathbb{T}_N^{d-1}} W_{([uN],y),([uN]+1,y)} \Big] \\
= \int_{\Gamma_-} \varphi(b(v))\, \mathrm{S}(dv) - \int_{\Gamma_+} \varphi(b(v))\, \mathrm{S}(dv)\,,
\end{aligned} \tag{2.1.7}
$$

où le courant $W_{x,y}$ entre deux sites voisins x, y est défini par (1.3.8) et dS est la mesure superficielle. Γ_- et Γ_+ désignent respectivement les bords gauche et droit de Ω,

$$
\Gamma_\pm = \{(u_1, \dots, u_d) \in \Omega \mid u_1 = \pm 1\}\,.
$$

• *Modèles en milieu aléatoire.* Avec E. Orlandi, dans [90], nous avons considéré le processus d'exclusion avec champ extérieur aléatoire décrit dans la section 1.3.1, de générateur défini par (1.3.13) avec des réservoirs. Le but est d'étendre les résultats de notre article [58] aux modèles non gradient et en milieu aléatoire.

Le processus évolue dans Ω_N avec des réservoirs sur le bord Γ_N. Les réservoirs sont modélisés par un processus de générateur

$$
(\mathcal{L}_b f)(\eta) = \sum_{x\in\Gamma_N} C^b(x/N,\eta)\,\big[f(\eta^x) - f(\eta)\big]\,,
$$

où η^x est la onfiguration obtenue à partir de η en é hangeant la valeur de $\eta(x)$

$$(\eta^x)(z) := \begin{cases} 1-\eta(x) & \text{si} \ \ z = x \\ \eta(z) & \text{si} \ \ z \neq x\,. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Les taux C^b sont hoisis de telle sorte que $\mathcal{L}_b$ soit réversible par rapport à la mesure de Bernoulli $\nu^{;N}_{(\cdot)}$:

$$\begin{aligned} C^b(x/N,\eta) =&\eta(x)\exp\Big\{-\frac{\alpha(x)+\lambda_0(b(\frac{x}{N}))}{2}\Big\} \\ &+(1-\eta(x))\exp\Big\{\frac{\alpha(x)+\lambda_0(b(\frac{x}{N}))}{2}\Big\}\,. \end{aligned}$$

Le omportement hydrodynamique est donné par l'équation (2.1.3), où la matri e de diffusion $D(\cdot)$ est donnée par la formule variationnelle (2.1.13). De même que dans [58], la démonstration du omportement hydrostatique est basée sur les omportement hydrodynamique du système partant d'un profil quel onque, et sur le fait que l'équation stationnaire de l'équation hydrodynamique est un attra teur global de l'équation hydrodynamique. De plus, nous déduisons la loi de Fi k du omportement hydrostatique.

Le omportement hydrodynamique pour les modèles d'ex lusion ave hamp extérieur aléatoire a été démontré sur le tore $\mathbb{T}^d$, par Faggionato & Martinelli dans [56], à savoir : si, initialement, les parti ules sont distribuées suivant une densité $\rho_0 : \mathbb{T}^d \to [0,1]$, alors le système au temps t est dé rit par une densité de parti ules $\rho_t : \mathbb{T}^d \to [0,1]$ qui est solution faible de l'équation aux dérivées partielles de type (2.1.3) :

$$\partial_t\rho \;=\; \nabla\cdot\;\; D(\rho)\nabla\rho\;\;,$$ l 10.9091m243 0uti--d378303(9ion)-385((2.1.3958(yp)-9rtemune)-2i

où $\mathbf{E}$ désigne l'espérance par rapport à la probabilité $\mathbf{P}$ de l'environnement définie dans la section 1.3.1. Le potentiel chimique $\lambda_0(\cdot)$ permet de paramétrer les particules par la densité ρ, c'est l'unique potentiel chimique qui satisfait la relation

$$\mathbf{E}\left[E^{\alpha,\lambda_0(\rho)}\, \eta(0) \right] = \rho$$

pour tout $\rho \in [0,1]$. La mesure $\mu^{\alpha,\lambda_0(\rho)}$ est définie par (1.3.17).

Pour obtenir l'équation (2.1.9) à partir d'une dynamique microscopique, il est plus convenable d'écrire la loi loi de Fick sous la forme

$$j = -\sigma(\rho)\nabla\lambda_0(\rho)\,,$$

où σ est la *conductivité*, ou la *mobilité* du système, liée à la matrice de diffusion par la relation dite d'Einstein, voir [101]

$$D(\rho) = \sigma(\rho)/\chi(\rho)\ ,$$

où $\chi(\rho)$ est la compressibilité statique, qui s'exprime en fonction de la pression par la formule

$$\chi(\rho) = \left(\lambda_0'(\rho)\right)^{-1} = \mathbf{E}\left[\frac{e^{(\lambda_0(\rho)+\alpha(0))}}{\left(1+e^{(\lambda_0(\rho)+\alpha(0))}\right)^2}\right]. \tag{2.1.11}$$

Remarquons que, pour tout $\rho \in \mathsf{R}_+$, $\chi(\rho)$ n'est rien d'autre que la moyenne (sur l'environnement) de la variance de $\eta(0)$ par rapport à la mesure $\mu^{\alpha,\lambda_0(\rho)}$:

$$\chi(\rho) = \mathbf{E}\left[\int \eta(0)^2 d\mu^{\alpha,\lambda_0(\rho)}(\eta) - \left(\int \eta(0) d\mu^{\alpha,\lambda_0(\rho)}(\eta)\right)^2\right]. \tag{2.1.12}$$

Comme dans (2.1.4), la formule de Green-Kubo permet d'exprimer la matrice symétrique de diffusion D sous forme variationnelle (voir [56]) : pour tout vecteur a de R^d et $\rho \in [0,1]$,

$$(a\cdot D(\rho)a) = \frac{1}{2\chi(\rho)}\inf_{g\in\mathcal{S}} \sum_{i=1}^{d} \mathbf{E}\left[E^{\alpha,\lambda_0(\rho)}\left[C(0,e_i;\eta)\left\{a_i\nabla_{0,e_i}\eta(0) + (\nabla_{0,e_i}\Gamma_g)(\eta)\right\}^2\right]\right]. \tag{2.1.13}$$

• *Limite incompressible.* La dérivation et l'interprétation des équations aux dérivées partielles qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle, comme les équations de Navier-Stokes, a suscité un grand intérêt en physique mathématique. Trois interprétations ont été développées pour obtenir es équations.

La première appro he on erne l'étude des limites in ompressibles [51, 52, 53, 6, 7]. Dans e adre, ave O. Benois, R. Esposito et R. Marra [7], nous avons étudié un modèle de gaz sur réseau dans un domaine borné ave   onditions aux bords. Il s'agissait d'étendre les résultats de R. Esposito, R. Marra & H.T. Yau [52] aux modèles hors équilibre. Le modèle onsidéré est l'ex lusion simple asymétrique dé rit dans la se tion 1.3.1 et généré par (1.3.6). On se pla e en dimension $d \geq 3$ et on prend une probabilité de transition $p(\cdot,\cdot)$ vérifiant (1.3.1), on la suppose asymétrique et à plus pro he voisin, ave $p(e_i) - p(-e_i) = \delta_i > 0$, où $e_1, \cdots, e_d$ sont les éléments de la base anonique de $\mathbb{R}^d$.

Le omportement hydrodynamique sous l'é helle eulerienne est dé rit par l'équation hyperbolique [97, 73, 3, 4, 5, 98],

$$\partial_t \rho \; + \; \delta \cdot \nabla \, F(\rho) \; = \; 0 \, , \tag{2.1.14}$$

où $F(\rho) = \rho(1-\rho)$ et $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d)$: si initialement les parti ules sont distribuées suivant une mesure produit de Bernoulli, de paramètre faiblement variable $\rho_0(x/N)$, et si on regarde le système sous l'é helle d'Euler $(x,t) \mapsto (x/N, tN)$, alors à tout instant ultérieur t, la suite des mesures empiriques (2.1.2) onverge vers la mesure absolument ontinue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité $\rho(t,u)$, est la solution entropique de l'équation (2.1.14) ave   ondition initiale $\rho_0(\cdot)$.

Les mesures invariantes pour l'ex lusion simple asymétrique sur le tore sont les mesures produit de Bernoulli de paramètre onstant. L'idée de la limite in ompressible [52] est de répartir initialement les parti ules suivant une mesure de Bernoulli dont le paramètre est une petite perturbation d'une onstante $a \in (0,1)$, et d'étudier le pro essus sous l'é helle diffusive. Heuristiquement, on peut interpréter ette idée de la manière suivante [52, 8, 79] : dans le adre des systèmes de parti ules asymétriques, les équations de Navier–Stokes s'é rivent sous la forme

$$\partial_t \rho^N \; + \; \delta \cdot \nabla F(\rho^N) \; = \; \frac{1}{N} \sum_{i,j} \partial_{u_i} \; D_{i,j}(\rho^N) \partial_{u_j} \rho^N \quad , \tag{2.1.15}$$

où D est la matri e de diffusion. Considérons une petite perturbation du profil onstant $a \in (0,1)$: $\rho_0^N(u) = a + \dfrac{\varphi(u)}{N}$. Supposons qu'à tout instant $t \geq 0$, le profil garde la même forme $\rho^N(t,u) = a + \dfrac{\varphi(t,u)}{N}$. Le ourant ma ros opique de l'équation (2.1.14) peut s'é rire

$$\delta F(\rho^N) = \delta F(a) - N^{-1} v\varphi - N^{-2}\delta\varphi^2\,, \quad v = (1-2a)\delta\,. \tag{2.1.16}$$

Par hangement d'é helle temporelle $t \mapsto tN^{-1}$, nous obtenons à partir de (2.1.16) et (2.1.15), l'équation suivante en la variable $\varphi_N = \varphi(tN, u)$:

$$\partial_t \varphi_N \; + \; Nv \cdot \nabla\varphi_N \; - \; \delta \cdot \nabla(\varphi_N)^2 \; = \; \sum_{i,j} D_{i,j}(a)\partial^2_{u_i,u_j}\varphi_N \; + \; O(N^{-1})\,.$$

La transformation

$$m_N(t,u) = \varphi_N(t, u - Nvt) \tag{2.1.17}$$

permet d'annuler le terme divergent $Nv \cdot \nabla\varphi_N$ de la dernière équation aux dérivées partielles ; on obtient à la limite une équation pour la variable $m = \lim_{N\to\infty}$

où D est une matri e de diffusion dont l'expression est donnée par la formule de Green-Kubo pour e modèle. La démonstration est basée sur l'utilisation de l'entropie relative, par rapport à la mesure ν_N^t de Bernoulli de profil $1/2 + \frac{1}{N} m(t, u)$, où m est la solution de l'équation (2.1.18) [102]. Plus pré isément, désignons par $\mu_N(t)$ l'évolution de la mesure ν_N^0 sous le semi-groupe du pro essus, a éléré dans le temps par N^2. La prin ipale étape de la démonstration onsiste à montrer qu'à tout instant $t \geq 0$, l'entropie $H[\mu_N(t)|\nu_N^t]$ de la mesure $\mu(t)$ par rapport à ν_N^t, satisfait

$$\lim_{N \to \infty} N^{2-d} H[\mu_N(t)|\nu_N^t] = 0 \,. \tag{2.1.19}$$

Le résultat dé oule ensuite de l'inégalité entropique (2.0.4).

La se onde appro he pour atteindre les équations de Navier-Stokes est proposée dans [43, 78]. Elle orrespond aux orre tions à la limite hydrodynamique. Enfin, la dernière interprétation [78, 8, 79] repose sur l'analyse du omportement de l'équation à temps grand.

2.2 Modèles à longue portée

Plusieurs arti les traitent de l'évolution ma ros opique de systèmes interagissant via un potentiel de Ka , voir par exemple [64, 65, 66, 85] pour les dynamiques onservatives et [31, 33, 85, 9] pour les dynamiques non- onservatives. Nous renvoyons au livre de E. Presutti [94] pour une étude synthétique et bibliographique.

Dans e ontexte, nous avons étudié les omportements hydrodynamiques et hydrostatiques de deux types de modèles perturbés par un potentiel de Ka : l'ex lusion ave   hamp extérieur aléatoire et les pro essus de Blume-Capel.

• *Exclusion avec désordre.* Ave E. Orlandi et E. Saada [88], nous avons travaillé sur le modèle d'ex lusion ave désordre perturbée par un potentiel d'intera tion de Ka (f. (1.3.18)). Le pro essus que nous avons onsidéré au niveau mi ros opique est onstruit pour $\beta \geq 0$, à partir de l'hamiltonien $H_N^{;}$ défini par (1.3.19), son générateur est donné par (1.3.22).

Les mesures invariantes pour la dynamique ave potentiel de Ka sont les mesures de Gibbs définies dans (1.3.20), qui ne sont pas produit. Puisque nous regardons le modèle omme une perturbation du pro essus pour $\beta = 0$, nos mesures de référen e sont les mesures produit (1.3.17), qui sont invariantes pour $\beta = 0$.

Pour presque toute réalisation de l'environnement $\alpha \in E_a$, nous démontrons que si les parti ules sont distribuées suivant un profil de densité initial ρ_0, alors lorsque $N \uparrow \infty$, les mesures empiriques onvergent vers l'unique solution faible de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \sum_{k,m=1}^{d} \partial_k \left\{ D_{k,m}(\rho) \left\{ \partial_m \rho - \beta \chi(\rho)\, \partial_m J * \rho \right\} \right\}, \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot)\,, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où *la compressi ilité* $\chi(\cdot)$ du système est définie dans (2.1.11) et (2.1.12). La matri e de diffusion est donnée par la formule (2.1.13). L'équation (2.2.1) peut se mettre sous forme d'une équation différentielle intégrale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\sigma(\rho) \nabla \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \rho} \right),$$

où la fon tionnelle de l'énergie $\mathcal{G}(\rho)$ est

$$\mathcal{G}(\rho) = \int g_0(\rho(r))dr - \frac{\beta}{2} \int\int J(r-r')\rho(r)\rho(r')drdr',$$

et $\sigma(\rho)$ est la ondu tivité ou la mobilité, asso iée au système pour $\beta = 0$. La fon tion de l'énergie libre g_0 est donnée par

$$g_0(\rho) = \rho\lambda_0(\rho) - p_0(\lambda_0(\rho))$$

pour la pression p_0 définie dans (2.1.10).

Les propriétés de la fon tionnelle de l'énergie ont été utilisées dans plusieurs travaux pour étudier la ségrégation de phases. Dans e ontexte, les deux dynamiques de Glauber et de Kawasaki pour le modèle d'Ising ave potentiel de Ka ont été largement étudiées. Citons i i les arti les [64, 65, 66] ; dans les deux premiers, les auteurs ont étudié la ségrégation de phase en utilisant les équations hydrodynamiques pour le modèle d'ex lusion sans environnement aléatoire (α onstant). Le troisième arti le étudie l'hydrodynamique pour l'ex lusion ave un potentiel à portée finie, pérturbée par un le potentiel de Ka .

• *Modèlxs dx lumx- apxl.* Dans l'arti le [85], en ollaboration eve R. Marra, nous avons étudié les dynamiques de Blume-Capel ave potentiel d'intera tion de Ka . Nous avons onsidéré es modèles dans le as onservatif ave une dynamique d'é hange de parti ules de type Kawasaki, et une dynamique de flips de spins non onservative (Glauber), f. le hapitre 1.3.2.

Nous avons établi les limites hydrodynamiques en volume infini pour les deux types de modèles. Comme ces dynamiques possèdent deux quantités conservées, la magnétisation et la concentration, l'évolution macroscopique est décrite pour chacune de ces dynamiques, par un couple d'équations aux dérivées partielles.

Pour la dynamique de type Kawasaki, nous avons utilisé la méthode d'entropie spécifique introduite dans [61]. Puisque la dynamique pour $\beta > 0$ est une perturbation du processus à température infinie $\beta = 0$, il est naturel de considérer comme mesures de référence les mesures invariantes pour cette dynamique. Nous avons démontré que si initialement, au niveau microscopique la magnétisation et la concentration sont distribuées suivant un couple de valeurs convenable (m_0, ϕ_0), alors à tout instant $t \geq 0$, le couple (m_t, ϕ_t) formé par la magnétisation et la concentration est donné par l'unique solution faible du système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t m = \nabla \cdot \Big[\nabla m - 2\beta \big(\phi - (m)^2\big) \nabla J * m \Big] , \\ \partial_t \phi = \nabla \cdot \Big[\nabla \phi - 2\beta m \big(1 - \phi\big) \nabla J * m \Big] , \\ m(0,\cdot) = m_0, \quad \phi(0,\cdot) = \phi_0 , \end{cases} \tag{2.2.2}$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

L'équation (2.2.2) peut s'écrire en fonction du flux gradient via la fonctionnelle de l'énergie libre $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(\underline{u}) = \int dr f^0\big(\underline{u}(r)\big) + \frac{1}{2}\int dr \int dr' J(r-r')[m(r)-m(r')]^2$$

où $\underline{u} := (m, \phi)$ et $f^0(\underline{u})$ est donnée par

$$f^0(\underline{u}) := -m^2 + \phi + \beta^{-1}\Big[\frac{1}{2}(m+\phi)\log(m+\phi) + \frac{1}{2}(\phi - m)\log(\phi - m) + (1-\phi)\log(1-\phi) - \phi\log 2\Big] .$$

Avec ces notations les équations (2.2.2) peuvent se mettre sous la forme

$$\partial_t u_\ell = \sum_{i=1} \sum_{k=1,2} \partial_i \left(M_{\ell,k} \partial_i \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta u_k} \right) , \quad \ell = 1, 2$$

ou encore sous forme vectorielle

$$\partial_t \underline{u} = \nabla \cdot \left(M \nabla \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \underline{u}} \right) ,$$

où nous avons désigné par $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u_\ell}$ la dérivée de $\mathcal{G}$ par rapport à la variable u_ℓ et par M la mobilité du système donnée par la matrice 2×2

$$M = \beta(1-\phi) \begin{pmatrix} \phi + \frac{\phi^2 - m^2}{1-\phi} & m \\ m & \phi \end{pmatrix} .$$

L'étude de la séparation de phases peut se faire par une analyse de la fonctionnelle de l'énergie $\mathcal{G}$.

Le comportement hydrodynamique pour le modèle de Blume-Capel de type Glauber est décrit par le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} m^{(G)} \\ \phi^{(G)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1\left(m^{(G)}, \phi^{(G)}\right) \\ \mathcal{G}_2\left(m^{(G)}, \phi^{(G)}\right) \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} m^{(G)}(0,.) \\ \phi^{(G)}(0,.) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} , \end{cases} \tag{2.2.3}$$

où $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1\left(m, \phi\right) &= \frac{1}{4}\left\{\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h') + \tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h')\right\} \\ &+ \frac{1}{4}\frac{m}{2}\left\{\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h')\right\} - \frac{3}{4}m \\ &+ \frac{\phi}{4}\left\{2\tanh\beta\alpha - \frac{1}{2}\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \frac{1}{2}\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h')\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2\left(m, \phi\right) &= \frac{1}{4}\left\{\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h')\right\} \\ &+ \frac{1}{4}\frac{m}{2}\left\{\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h') + \tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h')\right\} \\ &- \frac{1}{4}\frac{\phi}{2}\left\{\tanh\frac{\beta}{2}(\alpha + h') - \tanh\frac{\beta}{2}(\alpha - h')\right\} + \frac{1}{4}\left(2 - 3\phi\right) , \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = 2m * J + \lambda_1 , \quad h' = \lambda_2 - \int_{\mathbb{R}^d} J(x)dx$$

et les paramètres λ_1 et λ_2 sont définis dans la formule (1.3.26).

2.3 Modèles non conservatifs

Je me suis intéressé à deux types de modèles non conservatifs, des processus de naissances et morts et des modèles de spin-flip. L'étude du comportement hydrodynamique des processus de naissances et de morts constitue le sujet de ma thèse de doctorat. Les dynamiques microscopiques considérées sont des processus de sauts, de naissances et de morts : sur le tore discrétisé $\mathbb{T}_N^d$, des particules sautent indépendamment les unes des autres, elles sont créées et détruites selon des taux non linéaires, voir la section 1.3.3. J'ai utilisé des méthodes développées pour les systèmes conservatifs. Les équations obtenues par passage à la limite sont des équations de type réaction-diffusion [86, 87]

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \quad &= \Delta\rho \,+\, F(\rho) \\ \rho(0,\cdot) \quad &= \rho_0(\cdot)\,, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où $F(\cdot)$ est une fonction non linéaire.

Dans le premier travail [86], j'ai utilisé la méthode d'entropie de Guo, Papanicolaou & Varadhan [67]. La mesure invariante n'étant pas connue explicitement, j'ai considéré comme mesures de références celles qui sont invariantes pour la dynamique de sauts, c'est-à-dire les mesures produit de Poisson $(\nu_\rho)_{\rho\geq 0}$ définies dans (1.3.4) avec $g(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Bien que ces mesures ne soient pas invariantes pour la dynamique, j'ai contrôlé, sous des conditions sur les taux des naissance et de mort, la croissance de l'entropie (cf. (2.0.1)) du processus par rapport à ces mesures. Ceci m'a permis d'étendre les méthodes de [67] au processus étudié.

Dans le second article [87], j'ai adapté la méthode d'entropie relative de Yau [105], qui consiste à ramener (grâce à l'inégalité entropique (2.0.4)) l'étude de la limite hydrodynamique à celle de l'entropie relative : j'ai prouvé que si l'entropie $H[\mu(0)|\nu_{\rho(0,\cdot)}]$ de la mesure initiale $\mu(0)$ par rapport à $\nu_{\rho(0,\cdot)}$ est de l'ordre $o(N)$, alors à tout instant $t \geq 0$ l'entropie $H[\mu(t)|\nu_{\rho(t,\cdot)}]$ de la mesure $\mu(t)$ par rapport aux profils $\rho(t,\cdot)$ qui sont solutions régulières de l'équation (2.3.1) reste de même ordre $o(N)$, où $\mu(t) = \mu S(t)$ et $\{S(t)\,, t \geq 0\}$ est le semi-groupe associé au processus.

Les travaux autour des dynamiques de spin-flip auxquels je me suis intéressé portent sur deux types de modèles : les modèles de Glauber [9] décrits dans le paragraphe 3.2.2 sur les grandes déviations, et le modèle de Blume-Capel à longue portée de générateur (1.3.28), dont le comportement hydrodynamique est décrit par le système d'équations couplées (2.2.3), cf. [85].

2.4 L'hydrodynamique en volume infini

En ollaboration ave C. Landim, nous avons étudié le omportement hydrodynamique des pro essus de zero-range asymétriques de moyennes nulles en volume infini [74]. La méthode de Guo, Papani olaou & Varadhan repozs

Chapitre 3

Les grandes dé iations

Une fois un résultat sur un omportement limite établi, se posent naturellement les questions de la vitesse de onvergen e vers la limite, et d'un prin ipe de grandes déviations. Ainsi, la limite hydrodynamique d'un système

3.1 Modèles avec réservoirs

Cette partie dé rit les travaux [20] sur l'ex lusion simple faiblement asymétrique et [58] sur l'ex lusion ave hangement de vitesse.

3.1.1 Exclusion simple faiblement asymétrique

Ave L. Bertini et C. Landim [20], nous avons démontré un prin ipe de grandes déviations dynamique pour le pro essus d'ex lusion simple faiblement asymétique sur un segment $\Omega_N = \{-N, \cdots, N\}$ de dimension 1 ave des réservoirs à ses extrémités. Le générateur du pro essus est de type (1.3.29). La dynamique à l'intérieur de Ω_N a été dé rite dans la sous-se tion 1.3.3, son générateur est donné par (1.3.11). L'asymétrie à l'intérieur du domaine est d'ordre E/N pour un réel E fixé. L'a tion des réservoirs au bord de Ω_N est défini par le générateur

$$(\mathcal{L}_b f)(\eta) = (L_{-;N} f)(\eta) + (L_{+;N} f)(\eta)$$

où

$$\begin{aligned}
(L_{-;N} f)(\eta) &= \frac{N^2}{2} c_- \quad \eta(-N+1) \quad f(\sigma^{-N\pm} \quad \eta^{-N\pm} \quad) - f(\eta) \\
(L_{+;N} f)(\eta) &= \frac{N^2}{2} c_+ \quad \eta(N-1) \quad f(\eta^{N-1}) - f(\eta) \;,
\end{aligned}$$

pour $x \in \Omega_N$, la onfiguration η^x est définie par (2.1.8), et $c_\pm : \{0,1\} \to \mathsf{R}$ sont données par

$$c_\pm(\zeta) \;:=\; \rho_\pm e^{\mp E=\varrho\, N)}(1-\zeta) + (1-\rho_\pm)e^{\pm E=\varrho\, N)}\zeta\,.$$

Le omportement hydrodynamique a été établi pour es modèles sans réservoirs dans [36, 63, 72]. Ave réservoirs, le omportement hydrodynamique est dé rit par l'équation de Burgers visqueuse ave   onditions de Diri hlet aux extrémités du segment $[-1,1]$:

$$\begin{cases}
\partial_t \rho + \dfrac{E}{2}\nabla\chi(\rho) - \dfrac{1}{2}\Delta\rho \;=\; 0 \\
\rho_t(\pm 1) = \rho_\pm \\
\rho_0(u) = \gamma(u)\,,
\end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $\chi : [0,1] \to \mathsf{R}_+$ est la mobilité du système, définie par $\chi(a) = a(1-a)$, et $\rho_\pm \in (0,1)$ sont les densités fixées aux extrémités ± 1.

À cause du terme de viscosité non linéaire dans l'équation hydrodynamique (3.1.1), la fonctionnelle d'action $\mathcal{I}$ des grandes déviations n'est pas convexe ; cependant nous adaptons les grands axes des méthodes générales de [48, 72]. Pour cela, nous modifions les preuves des bornes supérieure et inférieure des grandes déviations en reprenant quelques arguments de [96].

La stratégie de base de la preuve de la borne inférieure est en deux étapes : d'abord, par les mêmes arguments que dans [72, 69], pour des trajectoires régulières : en effet, en se plaçant dans un espace de Hilbert convenable et en se basant sur le théorème de représentation de Riesz, nous obtenons une représentation explicite de la fonctionnelle d'action. Plus précisément, si une trajectoire π satisfait $\mathcal{I}(\pi) < \infty$, alors il existe une fonction $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \partial_t \pi_t - \dfrac{1}{2}\Delta \pi_t + \dfrac{E}{2}\nabla \chi(\pi_t) \;=\; -\nabla \big(\chi(\pi_t) \nabla H_t \big)\,, \\ H_t(\pm 1) \;=\; 0\,. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

De plus, la fonctionnelle d'action pour la trajectoire π en fonction de H s'écrit :

$$\mathcal{I}(\pi) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_{[-1,1]} \chi(\pi_t)\,[\nabla H_t]^2\, dx\,.$$

Notons que le membre de gauche de l'équation (3.1.2) est exactement l'équation hydrodynamique (3.1.1). La première étape s'obtient alors comme dans [72, 69] en étudiant le comportement hydrodynamique d'un processus auxiliaire, construit comme une perturbation faible du processus original par un champ extérieur, impliquant une fonction régulière H.

La seconde étape consiste à généraliser la borne inférieure à toutes les trajectoires par l'argument de densité suivant : étant donné une trajectoire π de fonctionnelle d'action finie, i.e. $\mathcal{I}(\pi) < \infty$, on construit une suite convenable de trajectoires régulières $\{\pi_n\}$ telles que $\pi_n \to \pi$ (dans l'espace topologique des trajectoires) et $\mathcal{I}(\pi_n) \to \mathcal{I}(\pi)$. C'est à ce stade de la preuve que la convexité de la fonctionnelle joue un rôle important dans [72, 13]. Pour remédier à ce problème de convexité, nous modifions la définition de la fonctionnelle $\mathcal{I}$ en lui imposant d'être infinie pour les trajectoires qui ne satisfont pas une évaluation de l'énergie ("energy estimate") appropriée. Pour montrer la densité pour la fonctionnelle modifiée, nous adaptatons des arguments dans [95, 96] au cas des réservoirs. Le fait que la mesure invariante pour le système n'est ni produit, ni connue explicitement, et le manque d'invariance par translation des mesures de référence exigent des outils supplémentaires.

D'autre part, la modification dans la définition de la fonctionnelle $\mathcal{I}$ rend la preuve de la borne supérieure plus difficile que dans [72, 13] : en effet nous avons besoin de montrer que l'évaluation de l'énergie a lieu ave une probabilité sur-exponentiellement pro he de 1.

Signalons enfin qu'en se basant sur nos résultats, Bertini, Gabrielli & Landim ont étudié l'énergie libre hors équilibre de l'ex lusion simple faiblement asymétrique [19].

3.1.2 Exclusion avec changement de vitesse

En ollaboration ave J. Farfan et C. Landim [58], nous avons donné une preuve des grandes déviations qui s'applique à une lasse de modèles ave réservoir plus larges en toute dimension. Pour illustrer la méthode, nous avons onsidéré le pro essus d'ex lusion ave hangement de vitesse.

L'obtention des omportements hydrodynamique et hydrostatique dans et arti le à été résumée dans le hapitre 2. La dynamique mi ros opique à l'intérieur du domaine est donnée par (1.3.10). La dynamique au bord Γ_N du domaine est hoisie de telle sorte que le générateur $\mathcal{L}_b$ soit réversible par rapport à la mesure produit de Bernoulli $\nu_N^{(\cdot)}$ de paramètre γ, où $\gamma(\cdot)$ est une fon tion définie sur un voisinage de Γ dont la restri tion à Γ soit $b(\cdot)$, la densité que nous fixons au bord du domaine. L'équation hydrodynamique, donnée par (2.1.5) est non-linéaire du se ond degré,

La ontribution de et arti le aux grandes déviations dynamiques est une importante simplifi ation de la preuve de la borne inférieure. La fon tionnelle d'a tion des grandes déviations dynamiques n'est pas onvexe ; omme dans l'arti le [20], nous avons suivi les grandes étapes du as non onvexe [72, 13] en adaptant les te hniques de [95, 96, 20, 89]. La prin ipale différen e par rapport aux arti les pré édents réside dans la preuve de l'extension de la borne inférieure et la densité relative à la fon tionnelle d'a tion $\mathcal{I}$. En effet, ette propriété de la densité a été démontrée dans [20, 96, 89] en approximant en plusieurs étapes une traje toire générale π par une suite de profils de plus en plus réguliers, et né essite don le hoix approprié d'une régularisation par onvolution spatiale et temporelle.

Afin d'a hever l'étape de régularisation spatiale pour des modèles qui évoluent sur tore [72, 69], il est naturel d'utiliser la onvolution des traje - toires par le noyau gaussien. Dans le as de systèmes ave réservoirs [20], ette étape n'est pas simple, ar le bord du domaine empê he l'utilisation du noyau gaussien, né essitant l'utilisation de la résolvante du mouvement brownien tué aux bord. Nous avons proposé dans notre arti le une démonstration plus simple pour la régularisation spatiale et temporelle : étant donné une traje toire π, et H la fon tion asso iée par l'équation (3.1.2), nous approximons H par une suite de fonctions régulières $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et nous montrons que la suite des trajectoires associées $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la trajectoire π et $\mathcal{I}(\pi_n) \to \mathcal{I}(\pi)$.

3.2 Modèles à longue portée avec désordre

3.2.1 Exclusion avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.

Avec E. Orlandi [89], nous avons travaillé sur les grandes déviations dynamiques de l'exclusion avec champ extérieur aléatoire perturbée par un potentiel d'interaction de Kac. Le modèle de spins que nous avons considéré évolue dans le tore de dimension $d \geq 3$, de largeur N. Le potentiel d'interaction de Kac de portée N a été défini dans (1.3.18). Le champ extérieur aléatoire est défini par des variables aléatoires indépendantes bornées de loi invariante par translation. Le processus est construit pour $\beta \geq 0$ à partir de l'hamiltonien $H_N^{;}$ défini par (1.3.19), son générateur est donné par (1.3.22).

La limite hydrodynamique a été établie dans [75]. L'équation obtenue est donnée par (2.1.3), elle est construite à partir de la matrice de diffusion D définie par (2.1.13). Le comportement hydrodynamique sans le potentiel de Kac a été étudié dans [56], où la formulation variationnelle de la matrice de diffusion D a été établie par la formule de Green-Kubo (cf. (2.1.13)).

Dans cet article nous établissons, pour presque tout environnement aléatoire, un principe de grandes déviations. La fonctionnelle d'action n'est pas convexe ; nous suivons les grandes lignes de [48, 72] en adaptant à notre situation les techniques introduites dans [95, 96]. De plus, le fait que le modèle soit non-gradient et la présence du potentiel de Kac à longue portée rendent l'analyse plus délicate. Nous démontrons en outre que la fonctionnelle d'action associée aux grandes déviations est semi-continue inférieurement et admet des ensembles de niveau compacts.

3.2.2 Modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire et potentiel de Kac.

Avec O. Benois, E. Orlandi, E. Saada et L. Triolo [9], nous avons étudié les limites hydrodynamiques et les grandes déviations pour des modèles de Glauber soumis aux potentiels d'interaction de Kac avec champ extérieur aléatoire.

En mé anique statistique à l'équilibre et hors équilibre, plusieurs travaux ont fait l'objet d'une étude autour des modèles d'Ising ave potentiel de Ka sans désordre. Nous nous référons au livre de Presutti [94] pour une synthèse bibliographique sur le sujet. Les grandes déviations dynamiques pour es modèles sans désordre ont été étudiées par Comets dans [31].

Nous avons onsidéré un modèle réversible, de spin-flip en dimension $d \geq 1$, sans loi de onservation, sur le tore de taille N, dé rit dans la sousse tion 1.3.2. Le potentiel d'intera tion de Ka de portée N est défini par la formule (1.3.18) ; le générateur infinitésimal est donné pour $\beta \geq 0$ dans (1.3.23), via l'hamiltonien $H_N^{;}$, défini par (1.3.19). Le hamp extérieur aléatoire est déterminé par des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui prennent un nombre fini de valeurs $a_i \in \mathbb{R}$ ave les probabilités p_i, pour $i = 1, \ldots, \ell$, où ℓ un nombre entier fixé. Les propriétés de l'équilibre statistique de es modèles ont été largement étudiées, voir [21] pour un re ueil de résultats. Des modèles similaires en dimension $d = 1$ ont été analysés dans les arti les [26, 27, 28, 92].

Le prin ipal résultat de notre arti le est l'obtention d'un prin ipe de grandes déviations de la magnétisation empirique m pour presque toute onfiguration du désordre (en anglais, "quen hed limit"). Contrairement au as non-aléatoire étudié dans [31], notre modèle n'est pas un hamp moyen ; pour pallier ette diffi ulté, nous avons onsidéré le ℓ-uplet, $\overline{m} = (m_1, \cdots, m_\ell)$ dont haque omposante m_i orrespond au hamp de la magnétisation sur l'ensemble des sites où l'environnement prend la valeur a_i. Chaque omposante du ve teur aléatoire $\overline{m}$ peut alors être traitée omme un hamp moyen, en tenant ompte du fait que toutes les omposantes sont liées entre elles. Puisque $m = \sum_{i=1}^N m_i$, le prin ipe des grandes déviations de la magnétisation m est ensuite obtenu par le prin ipe de ontra tion.

3.3 Modèles à longue portée avec réservoirs

Comme nous l'avons signalé dans le hapitre 2, les systèmes à longue portée interagissant via un potentiel d'intera tion de Ka ont sus ité un intérêt onsidérable dans l'étude de la séparation de phases des états d'équilibre pour les systèmes de parti ules. Les versions dynamiques de es gaz sur réseau dans le as périodique (sans réservoirs) et en volume infini $\mathbb{Z}^d$, ont été analysées dans [64, 65, 66, 2, 85, 75, 89]. Les états d'équilibre pour es systèmes sur le tore ou en volume infini, ont également été largement examinés [68, 81, 93, 94]. Une perspe tive naturelle est alors d'examiner la possibilité d'étendre es résultats aux systèmes ave réservoirs.

Dans cet esprit, dans l'article [91] nous avons étudié avec E. Orlandi un système de particules qui modélise un gaz sur réseau à longue portée, évoluant dans un domaine borné auquel nous avons imposé des réservoirs à la frontière. La dynamique à l'intérieur du domaine suit un processus de Kawasaki perturbé par un potentiel de type interaction de Kac. Afin de décrire le modèle simplement, plaçons nous en dimension 1, et considérons un entier N assez grand et deux densités (du bord) positives $0 < \rho^- \leq \rho^+ < 1$. L'espace macroscopique est le segment $\Lambda = [-1, 1]$ et les particules évoluent au niveau microscopique sur l'espace $\Lambda_N = \{-N, \ldots, N\}$. Pour définir l'interaction entre particules, comme dans (1.3.18), on considère un noyau de probabilité invariant par translation $J(\cdot, \cdot)$, symétrique, régulier et de rang 1 : $J(u, v) = J(0, v - u)$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $J(0, u) = 0$ pour tout $|u| \geq 1$, et $\int_{\mathbb{R}} J(0, u)du = 1$.

À cause de la frontière et en tenant compte du confinement des particules à l'intérieur du domaine, une modification du potentiel de Kac (1.3.19) est nécessaire. Pour x et y dans Λ_N, en plus de l'interaction de paire $J(x/N, y/N)$ entre x et y, nous imposons au site x (au moyen du potentiel $J(\cdot, \cdot)$), les interactions entre x/N et les reflexions de y/N par rapport aux points -1 et $+1$. Le potentiel d'interaction de Kac pour le modèle avec réservoirs, que nous appelons l'interaction de "Neuman" est alors défini par

$$J^{neum}(u, v) = J(u, v) + J(u, 2 - v) + J(u, -2 - v) .$$

Nous obtenons un noyau de probabilité symétrique sur Λ :

$$J^{neum}(u, v) = J^{neum}(v, u) \quad \text{et} \quad \forall u \in \Lambda , \qquad \int J^{neum}(u, v)dv = 1 .$$

Ainsi, on définit l'interaction de paire entre deux sites x and y de Λ_N par

$$J_N(x, y) = N^{-1} J^{neum}(\frac{x}{N}, \frac{y}{N}) ,$$

et l'énergie d'interaction totale est donnée comme dans (1.3.19) par l'hamiltonien

$$H_N(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda_N} J_N(x, y)\eta(x)\eta(y) . \tag{3.3.1}$$

Signalons que ce choix d'interaction et de potentiel a été utilisé dans [34].

Nous avons étudié le processus dans le cas diffusif. Le générateur du processus de Markov qui caractérise le système de particules est de type (1.3.29) ; la partie du générateur qui décrit l'évolution des particules à l'intérieur du domaine est de type (1.3.22) avec $\beta > 0$ et $\alpha \equiv 1$, et au bord la dynamique est onstruite de telle façon qu'elle fixe les densités respe tives ρ^- et ρ^+ aux bords gau he et droit.

Le omportement hydrodynamique du système partant d'une mesure asso iée à un profil donné est démontré pour tout $\beta > 0$. L'équation est différentielle intégrale quasilinéaire de type (2.1.3), ave $D = I$ et ondition de Cau hy au bord, où I désigne la matri e identité.

La limite hydrostatique est obtenue seulement pour β plus petit qu'une ertaine valeur $\beta_0 = \beta_0(\Omega, J)$. Nous avons suivi l'appro he de [58], basée sur le fait que l'équation stationnaire est un attra teur global de l'équation hydrodynamique. La restri tion à β_0 vient de e que nous étions dans l'in apa ité de démontrer ette dernière propriété pour β petit.

Le se ond résultat prin ipal de l'arti le on erne les grandes déviations des mesures empiriques autour de la limite hydrodynamique.

[91], avec E. Orlandi, nous avons étudié les comportements hydrodynamique et hydrostatique, ainsi que les grandes déviations autour de la limite hydrodynamique. Nous avons considéré un système qui modélise un gaz sur réseau à longue portée, évoluant dans un domaine borné auquel nous avons imposé des réservoirs à la frontière. La dynamique à l'intérieur du domaine suit un processus de Kawasaki perturbé par un potentiel d'interaction de Kac. La dynamique qui modélise l'action des réservoirs aux bords du domaine est un processus de Glauber qui consiste à imposer deux densités et $_{+}$ aux bords gauche et droit du segment. Di érentes questions se posent :

1. Étendre ces résultats aux dimensions supérieures.
2. Étudier les modèles avec di érentes conditions aux bords.
3. Étudier les grandes déviations pour la mesure stationnaire hors équilibre.
4. Obtenir des équations hydrodynamiques dont les matrices de di usion sont dégénérées, et étudier les états stationnaires associés.

4.2 Limites incompressibles

Une question qui nous intéresse est la dérivation des équations de Navier-Stokes dans un domaine borné avec conditions au bord. Il s'agit de la suite de l'article [7], décrit dans la section 2.1. Avec O. Benois, R. Esposito et R. Marra, nous avons étudié la limite incompressible du processus d'exclusion simple asymétrique dans un domaine ouvert, muni de réservoirs de particules à sa frontière. Les réservoirs, de densité constante, sont modélisés par des processus de naissances et de morts. Nous prouvons que, lorsque la densité initiale et la densité des réservoirs sont proches de 1/2, le champ de densité empirique converge vers l'équation de Burgers avec conditions de Dirichlet au bord. Le premier problème concerne la généralisation des travaux de [7] au cas où la densité initiale est proche d'une constante quelconque $0 < a < 1$.

Le second problème porte sur des modèles plus complexes, qui permettent d'obtenir rigoureusement, comme limite incompressible, les équations de Navier-Stokes dans un domaine borné avec des conditions de Dirichlet au bord. Il s'agit d'étudier le comportement hydrodynamique et les grandes déviations pour les modèles considérés dans les articles ([EMY], [QY]) dans un domaine ouvert avec conditions au bord du domaine.

4.3 Les équations de réaction-diffusion

Ces équations ont été largement étudiées dans la littérature. Leurs domaines d'appli ations sont très nombreux : la mé anique, la physique, la himie, la te hnologie, la biologie et de nombreux autres domaines.

Les équations de réa tion-diffusion ont fait l'objet d'une étude dans les arti les [86] et [87], elles sont de type

$$\partial_t \rho = \Delta\rho + F(\rho)\,. \tag{4.3.1}$$

Les dynamiques mi ros opiques onsidérées sont des pro essus de sauts, de naissan es et de morts. Au niveau mi ros opique, les parti ules se dépla ent suivant des mar hes aléatoires indépendantes (e qui donne par passage à la limite, le terme lapla ien $(\Delta\rho)$ dans la limite hydrodynamique. Le terme sour e $F(\cdot)$ s'é rit sous la forme $F(\rho) = \tilde{b}(\rho) - \tilde{d}(\rho)$, où $\tilde{b}(\rho)$ (resp. $\tilde{d}(\rho)$) dépend du pro essus et plus pré isément du taux de naissan e (resp. de mort) de parti ules au niveau mi ros opique. Des améliorations ou généralisations peuvent être apportées aux travaux on ernant es modèles dans plusieurs dire tions.

• *Modèles avec reservoirs et mesures stationnaires.* Une question naturelle suite à l'obtention de la limite hydrodynamique est l'étude des grandes déviations pour es pro essus non onservatifs. Les grandes déviations ont été étudiées sous des onditions de onvexité sur le terme sour e $F(\cdot)$, d'abord par Jona-Lasinio, Landim & Vares [JLV] sur un domaine ave onditions périodiques (le tore), puis ré emment par Bodineau & Lagouge dans deux arti les ([BL1], [BL12]), en dimension 1 pour des modèles ave réservoirs.

Le premier problème porte sur l'étude de l'hydrostatique, et sur l'extension des résultats sur les grandes déviations à toutes les dimensions et ave des onditions plus faibles sur le terme sour e F.

Un autre problème d'intérêt on erne les flu tuations pour es modèles. Signalons que même sur le tore, les mesures invariantes ne sont pas onnues expli itement. Il s'agirait alors d'obtenir des flu tuations pour des systèmes hors équilibre.

• *Explosion en temps fini (“ low-up”).* Une des propriétés les plus remarquables des équations de type (4.3.1) est la possibilité qu'elles produisent des singularités. En effet, même à partir de données régulières, la solution peut développer des singularités en temps fini, elles- i sont produites en raison de la présen e du terme non linéaire F. Elles sont dues à une roissan e rapide vers l'infini de la densité dans un temps fini. Le phénomène est onnu sous le nom d'explosion (“blow-up”).

Dans ette perspe tive, il est intéressant de omprendre le omportement mi ros opique de e genre de systèmes, et en parti ulier d'étudier leurs singularités.

• *Systèmes d'équations de réaction-diffusion.* Les systèmes d'équations de réa tion-diffusion ouplées, peuvent être obtenus à partir des systèmes de parti ules. Les dynamiques mi ros opiques en question dé rivent l'évolution de plusieurs espè es (de parti ules) qui ohabitent dans un environnement et qui rentrent en ompétition. Ces pro essus sont utilisés omme modèles pour les réa tions himiques, l'épidémiologie, les dynamiques de populations…

Il serait intéressant d'étudier les grandes déviations autour de la limite hydrodynmique, ainsi que les problèmes liés aux mesures stationnaires hors équilibre.

4.4 Références (avec les initiales des auteurs)

[B1] Blount. D. : Comparison of sto hasti and deterministi models of a linear hemi al rea tion with diffusion. *Ann. Prob.* **19** (4), (1991), 1440–1462.

[B2] Blount. D. : Law of large numbers in the supremum norm for a hemi al rea tion with diffusion. The *Ann. App. Prob.*, **2** (1), (1992), 131–141.

[BL1] Bodineau, T., Lagouge, M. : Current large deviations in a driven dissipative model, *J. Stat. Phys.* **139**, no. 2, (2010), 201-219.

[BL2] Bodineau, T., Lagouge, M. : Large deviations of the empiri al urrents for a boundary driven rea tion diffusion model, *Annals of Applied Pro* (To appear).

[EMY] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Navier-Stokes equations for sto hasti parti le systems on the latti e, *ommun. Math. Phys*, **182** (1996), 395–456.

[JLV] Jona-Lasinio, G., Landim, C., M. E. Vares, M. E. : Large deviations for a rea tion-diffusion model, *Probability Theory and Related Fields*, 97, (1993), 339-361.

[QY] Quastel, J., Yau, H.-T. : Latti e gases, large deviations, and the in ompressible Navier-Stokes equations. *Ann. of Math.* (2), **1**, 148, (1998), 51–108.

Liste des travaux

pré édés de leur numéros dans la bibliographie

[91] Mourragui, M., Orlandi, E. : Ma ros opi properties and dynami- al large deviations of the boundary driven Kawasaki pro ess with long range intera tion. *Nonlinearity*, **26**, 141-175. (2013)

[9] Benois, O., Mourragui, M., Orlandi, E., Saada, E., Triolo, L. : Quen hed large deviations for Glauber evolution with Ka intera tion and Random Field. *Markov Processes Relat. Fields*, **18**, p. 215-268. (2012)

[58] Farfan, J., Landim, C., Mourragui, M. : Hydrostati s and dynam- i al large deviations of boundary driven gradient symmetri ex lusion pro esses. *Stochastic Processes and their Applications,* **121**, N. 4, p. 725-758. (2011)

[20] Bertini, L., Landim, C., Mourragui, M. : Dynami al large devi- ations for the boundary driven weakly asymmetri ex lusion pro ess. *Ann. Probab.* Volume 37, N. 6, p. 2357-2403. (2009)

[90] Mourragui, M., Orlandi, E. : Latti e gas model in random medium and open boundaries : hydrodynami and relaxation to the steady state. *Journal of Statistical Physics.* Volume 136, p. 685-714. (2009)

[89] Mourragui M., Orlandi E. : Large deviations from a ma ros opi s aling limit for parti le systems with Ka intera tion and random potential. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités,* **43**, p. 677-715. (2007)

[7] Benois, O., Esposito, R., Marra, R., Mourragui, M. : Hydrodynami s of a driven latti e gas with open boundaries : The asymmetri simple ex lusion. *Markov Processes and Relat. Fields.* **10**, p. 89-112. (2004)

[88] Mourragui, M. Orlandi, E. and Saada, E. : Ma ros opi evolution of parti le systems with random field Ka intera tion. *Nonlinearity.* **16**, p. 2123-2147, (2003)

[75] Landim C., Mourragui M., Sellami S. : Hydrodynami al limit for a nongradient intera ting parti le system with sto hasti reservoirs.
– *Teor. Veroyatnost. i Primenen. Probab.* **45**, N. 4, p. 694–717, (2000)
– Translation in *Theory Probab. Appl.* **45**, N. 4, p. 604–623, (2002)

[85] Marra R., Mourragui M. : Phase segregation dynami s for the Blume-Capel model with Ka intera tion. *Stoch. Proc. Appl.* **88**, p. 79–124, (2000)

[74] Landim, C., Mourragui, M. : Hydrodynami limit of mean zero asymmetri zero range pro esses in infinite volume. *Ann. Inst. Henri. Poincaré.* Vol 33, N. **1**, p. 361-385, (1997)

[87] Mourragui, M. : Entropie relative et omportement hydrodynamique des pro essus de sauts, de naissan es et de morts. *Ann. Inst. Henri. Poincaré.* **32**, no. 3, p. 361-385, (1996)

[86] Mourragui, M. : Limite hydrodynamique d'un pro essus de sauts, de naissan es et de morts. *. R. Acad. Sci. Paris,.* **316**, Série **I**, p. 921-924, (1993)

Bibliographie

[1] Andjel, E.D. : Invariant measures for the zero range pro esses. *Ann. Probab.* **10**, (1982), no. 3, 525-547.

[2] Asselah, A., Gia omin, G. : Metastability for the ex lusion pro ess with mean-field intera tion. *J. Statist. Phys.*, **93**, (1998), no 5-6, 1051-1110.

[3] Bahadoran, C. : Hydrodynami al limit for spatially heterogeneous simple ex lusion pro esses. *Probab Theory Related Fields*, **110**, (1998), no. 3, 287-331.

[4] Bahadoran, C. : Blo kage hydrodynami s of one-dimensional driven onservative systems. *Ann. Probab.* **32**,(2004), 805-854.

[5] Bahadoran, C., Guiol, H., Ravishankar, K., Saada, E. : A onstru tive approa h to Euler hydrodynami s for attra tive parti le systems. Appli ation to k-step ex lusion. *Stochastic Process. Appl*, **99**, (2002), 1-30.

[6] Beltrán, J., Landim, C. : A latti e gas model for the in ompressible Navier–Stokes equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.* **44**, (2008), no. 5, 886-914.

[7] Benois, O., Esposito, R., Marra, R., Mourragui, M. : Hydrodynami s of a driven latti e gas with open boundaries : The asymmetri simple ex lusion. *Markov Process. Related Fields*, **10**, (2004), no. 1, 89-112.

[8] Benois O., Koukkous A., Landim C. : Diffusive behaviour of asymmetri zero range pro esses. *J. Stat. Phys.* **87**, (1997), 577–591.

[9] Benois, O., Mourragui, M. , Orlandi, E., Saada, E., Triolo, L. : Quen hed large deviations for Glauber evolution with Ka intera tion and Random Field. *Markov Process. Related Fields*, **18**, (2012), 215-268.

[10] Bernardin, C. : Regularity of the diffusion oeff ient for latti e gas reversible under Bernoulli measures. *Stoch. Proc. Appl.* 101, (2002), 43-68.

[11] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Flu tuations in stationary non equilibrium states of irreversible pro esses. *Phys. Rev. Lett.* 87, 040601 (2001).

[12] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Ma ros opi flu tuation theory for stationary non equilibrium state. *J. Statist. Phys.* 107, (2002), 635–675.

[13] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations for the boundary driven simple ex lusion pro ess. *Math. Phys. Anal. Geom.* **6**, 231–267 (2003).

[14] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Current flu tuations in sto hasti latti e gases. *Phys. Rev. Lett.* 94, 030601 (2005).

[15] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Non equilibrium urrent flu tuations in sto hasti latti e gases. *J. Statist. Phys.* 123, (2006), 237-276.

[16] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviation approa h to non equilibrium pro esses in sto hasti latti e gases. *ull. raz. Math. Soc.,* New Series **37**, (2006), 611-643.

[17] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations of the empiri al urrent in intera ting parti le systems. *Theory of Probability and its Applications*, 51, (2007), 2–27.

[18] Bertini L., Gabrielli D., Lebowitz J. : Large deviations for a sto hasti model of heat flow. *J. Stat. Phys.* **121**, (2005), no 5-6, 843-885.

[19] Bertini L., Gabrielli D., Landim C. : Strong asymmetri limit of the quasi-potential of the boundary driven weakly asymmetri ex lusion pro ess. *omm. Math. Phys.*, **289**, (2009), 311-334.

[20] Bertini, L. Landim, C., Mourragui, M. : Dynami al large deviations for the boundary driven weakly asymmetri ex lusion pro ess. *Ann. Pro a .* Volume 37, Number 6, (2009), 2357-2403.

[21] Bodineau T. : Interfa es in a one dimensional Ising spin system. *Stoch. Proc. Appl.*, **61**, (1996), 1–23.

[22] Bodineau, T., Derrida, B. : Current flu tuations in non-equilibrium diffusive systems : an additivity prin iple. *Phys. Rev. Lett.*, 92, 180601, (2004).

[23] Bodineau, T., Derrida, B. : Distribution of urrent in nonequilibrium diffusive systems and phase transitions. *Phys. Rev.* E (3) 72, (2005), no. 6, 066110

[24] Bodineau, T., Derrida, B. : Current large deviations for asymmetri ex lusion pro esses with open boundaries. *J. Stat. Phys.* 123, (2006), no. 2, 277-300

[25] Bodineau, T., Gia omin, G. : From Dynami to Stati Large Deviations in boundary Driven Ex lusion Parti le Systems. *Stoch. Proc. Appl.* **110**, (2004),67-81.

[26] Cassandro M., Orlandi E., Presutti E. : Interfa es and typi al Gibbs onfigurations for one-dimensional Ka potentials. *Probab. Th. Related Fields,*, **96**, (1993), 57-96.

[27] Cassandro M., Orlandi E., Pi o P. : Typi al onfigurations for one-dimensional random field Ka model. *Ann. Probab.* **27**, No 3, (1999), 1414–1467.

[28] Cassandro M. , Orlandi E., Pi o P., Vares M.E. : Typi al onfigurations for one-dimensional random field Ka model : lo alization of the phases. *in preparation.*

[29] Cassandro M, Presutti E. : Phase transitions in Ising systems with long but finite range intera tions. *Markov Process and related Fields*, **2**, (1996), 241–262.

[30] Chen, M.F. : *From Markov chains to non-equilibrium particle systems.* Word S ientifi . Singapore. (1992).

[31] Comets, F. : Nu leation for a long range magneti model. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.* **23**, (1987), no. 2 135–178.

[32] DeMasi, A., Ferrari, P. : A remark on the hydrodynami s of the zero range pro esses. *J. Stat. Phys.* 36, (1984), 81-87.

[33] De Masi A., Orlandi E., Presutti E., Triolo L. : Glauber evolution with Ka potentials I. Mesos opi and ma ros opi limits, interfa e dynami s. *Nonlinearity*, **7**, (1996), 287–301.
  – Glauber evolution with Ka potentials II. Flu tuation. Nonlinearity, **9**, (1996), 27–51.
  – Glauber evolution with Ka potentials. III. Spinodal de omposition. *Nonlinearity*, **9**, (1996), 53–114.

[34] De Masi A., Presutti E., Tsagkarogiannis D. : *Fourier Law, phase transition and the stationary Stephan problem. Arch. Rat. Mech. Anal.* DOI : 10.1007/s00205-011-0423-1,

[35] De Masi, A., Presutti, E., *Mathematical methods for hydrodynamic limits.* Volume 1501 of Le ture Notes in Mathemati s, Springer-Verlag, New York, (1991).

[36] De Masi A., Presutti E., S a iatelli E. : The weakly asymmetri simple ex lusion pro ess. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités.* **25**, (1989), 1–38.

[37] Derrida B. : Non equilibrium steady states : flu tuations and large deviations of the density and of the urrent. *J. Stat. Mech. Theory Exp.* P07023, (2007).

[38] B. Derrida, J.L. Lebowitz, E.R. Speer : Large deviation of the density profile in the steady state of the open symmetri simple ex lusion pro ess. *J. Statist. Phys.* **107**, (2002), 599–634.

[39] Derrida B., Lebowitz J.L., Speer E.R. : Exa t large deviation fun - tional of a stationary open driven diffusive system : the asymmetri ex lusion pro ess. *J. Statist. Phys.* **110**, (2003), 775–810.

[40] Deus hel, J. D., Stroo k, D. W., *Large Deviations*, A ademi Press, San Diego, (1989).

[41] Dobrushin, R.L. : Markov pro esses with a large number of lo ally intera ting omponents : existen e of a limit pro ess and his ergod- i ity. *Problems Inform. Transmition*, **7**, (1971), 149–164.

[42] Dobrushin, R.L. : Markov pro esses with many lo ally intera ting omponents : the reversible ase and generalization. *Problems Inform. Transmition*, **7** (1971), 235–241.

[43] Dobrushin, R.L. : Cari ature of Hydrodynami s, pro eed. *IX–th International ongress of Math–Phys.*, 17–27 July 1988, Simon, Truman, Davies ed., Adam Hilger (1989), 117–132.

[44] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptoti evaluation of ertain Markov pro ess expe tations for large time I. *ommun. Pure Appl. Math*, **28**, (1975), 1-47.

[45] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptoti evaluation of ertain Markov pro ess expe tations for large time II. *ommun. Pure Appl. Math*, **28**, (1975), 279-301.

[46] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptoti evaluation of ertain Markov pro ess expe tations for large time III. *ommun. Pure Appl. Math*, **29**, (1976), 389-461.

[47] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S. : Asymptoti evaluation of ertain Markov pro ess expe tations for large time IV. *ommun. Pure Appl. Math*, **36**, (1983), 183-212.

[48] Donsker M. D., Varadhan S. R. S. : Large Deviations from a hydrodynami s aling limit. *ommun. Pure Appl. Math.* **42**, (1989), 243–270.

[49] Durrett, R. : *ten lectures on particle systems.* Saint Flour Le ture Notes, *Lect. Notes. Math.* **1608**, (1995), 97-201.

[50] Enaud C., Derrida B. : Large deviation fun tional of the weakly asymmetri ex lusion pro ess. *J. Statist. Phys.* **114**, (2004), 537–562.

[51] Esposito R., Marra R. : On the derivation of the in ompressible Navier-Stokes equation for Hamiltonian parti le systems, *Jour. Stat. Phys.*, **74**,(1993), 981-1004.

[52] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Diffusive limit of asymmetri simple ex lusion. *Review in Math. Phys.* 6, (1994), 1233-1267.

[53] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Navier-Stokes equations for sto hasti parti le systems on the latti e, *ommun. Math. Phys*, 182, (1996), 395–456.

[54] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Hydrodynami s of stationary nonequilibrium states for some latti e gas models. *ommun. Math. Phys.*, Vol. **132**, (1990), 252-283.

[55] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Latti e Gas Models in Conta t with Sto hasti Reservoirs : Lo al Equilibrium and Relaxation to the Steady State. *ommun. Math. Phys.*, Vol. **140**, (1991), 119-131.

[56] Faggionato, A., Martinelli F. : Hydrodynami limit of a disordered latti e gas. *Prob. Th. Rel. Fields* **127**, (4), (2003), 535–608.

[57] Farfan J. : Stationary large deviations of boundary driven ex lusion pro esses. *Preprint arXiv :0908.1798*, (2009).

[58] Farfan, J.S. Landim, C., Mourragui, M. : Hydrostati s and dynami al large deviations of boundary driven gradient symmetri ex lusion pro esses. *Stochastic Processes and their Applications*, (2010).

[59] Ferrari P. A., Presutti E., Vares M. E. : Nonequilibrium flu tuations for a zero range pro ess, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **24**, (1988), 237–268.

[60] Freidlin, M.I., Wentzell, A.D. : *Random Perturbation of Dynamical Systems,* translated by J. Szu , Springer, Berlin (1984).

[61] Fritz, J. : On the diffusive nature of the entropy flow in infinite systems : remarks to a paper by Guo-Papani olau-Varadhan. *ommun. Math. Phys.* **133**, (1990), 331-352.

[62] Galves, A., Kipnis, C., Mar hioro, C., Presutti, E. : Nonequilibrium measures whi h exhibit a temperature gradient : study of a model. *ommun. Math. Phys.* 81, (1981), 127-148.

[63] Gärtner J. : Convergen e towards Burger's equation and propagation of haos for weakly asymmetri ex lusion pro esses. *Stoch. Proc. Appl.* **27**, (1988), 233–260.

[64] Gia omin G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynami s in parti le systems with long range intera tion I. Ma ros opi limits. *J. Stat. Phys.* **87**(1997), 37–61.

[65] Gia omin G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynami s in parti le systems with long range intera tion II. Interfa e Motion. *SIAM J. Appl. Math.* **58**(1998), 1707–1729.

[66] Gia omin, G., Lebowitz, J. L., Marra, R. : Ma ros opi evolution of parti le systems with short- and long-range intera tions. *Nonlinearity.* **13**, (2000), 2143–2162.

[67] Guo M.Z., G. Papani olau G., Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor intera tions. *omm. Math. phys.* **118**, (1988), 31–59.

[68] Ka M., Uhlenbe k G., Hemmer P.C. : On the van der Waals theory of vapour-liquid equilibrium.
- I. Dis ussion of a one-dimensional model. *J. Math. Phys.* **4** (1963), 216–228.
- II. Dis ussion of the distribution fun tions. *J. Math. Phys.* **4** (1963), 229–247.
- III. Dis ussion of the riti al region. *J. Math. Phys.* **5** (1964), 60–74.

[69] Kipnis C. ; Landim C. : *Scaling limits of interacting particle systems.* Grundlehren der Mathematis hen Wissens haften [Fundamental Prin i- ples of Mathemati al S ien es], 320. Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[70] Kipnis C., Landim C., Olla S. : Hydrodynami al limit for a nongradient model : the generalized ex lusion pro esses, *omm. Pure Appl. Math*, **47**, (1994), pp. 1475–1545.

[71] Kipnis C., Landim C., Olla S. : Ma ros opi properties of a stationary non-equilibrium distribution for a non-gradient intera ting parti le system. *Ann. Inst. H. Poincaré.*, Vol. **31**, (1995), pp. 191-221.

[72] Kipnis C., Olla S., Varadhan S.R.S. : Hydrodynami s and large deviations for simple ex lusion pro esses. *ommun. Pure Appl. Math.* **42**, (1989), 115–137.

[73] Landim, C. : Conservation of lo al equilibrium for asymmetri attra tive parti le systems on Z^d, *Ann. Prob.*, **21**, (1993), 1782-1808.

[74] Landim, C. and Mourragui, M. : Hydrodynami limit of mean zero asymmetri zero range pro esses in infinite volume. *Ann. Inst. Henri. Poincaré.* Vol 33, N. **1**, (1997), 361-385.

[75] Landim C., Mourragui M., Sellami S. : Hydrodynami al limit for a nongradient intera ting parti le system with sto hasti reservoirs.
– *Teor. Veroyatnost. i Primenen. Probab.* **45**, N. 4, (2000), 694–717.
– Translation in *Theory Probab. Appl.* **45**, N. 4, (2002), 604–623.

[76] Landim C., Olla O., S. Varadhan S.R.S, : Symmetri simple ex lusion pro ess : regularity of the self diffusion oeffi ient. *ommun. Math. Phys.* **224**, (2001), 307–321.

[77] Landim, C., Olla, S., Varadhan, S.R.S. : Finite-dimensional approximation of the self-diffusion oeffi ient for the ex lusion pro ess. *Ann. Probab.* Volume 30, Number 2, (2002), 483-508.

[78] Landim, C., Olla, S., Yau, H.T. : First order orre tion for the hydrodynami limit of asymmetri simple ex lusion pro esses in dimension $d \geq 3$, *ommunications on Pure and Applied Mathematics* 50, (1997), 149-203.

[79] Landim, C., Sued, M., Valle, G. : Hydrodynami Limit of Asymmetri Ex lusion Pro esses Under Diffusive S aling in $d \geq 3$. *ommun. Math. Phys.* **249**, N. 2, (2004), 215-247.

[80] Lebowitz J.L., Mazel A, Presutti E. : Liquid-vapor phase transitions for systems with finite range intera tions. *J. Stat. Phys.* **94**, (1999), No 5-6, 955–1025.

[81] Lebowitz J., Penrose O. : Rigorous treatment of the Van der Waals Maxwell theory of the liquid-vapour transition. *J. Math. Phys.* **7**, (1966), 98–113.

[82] Liggett, T.M. : *Interacting Particle Systems.* Springer-Verlag. Berlin, New York, (1985).

[83] Liggett, T.M. : *Stochastic Interacting Systems : ontact, Voter and Exclusion Processes.* Springer Verlag., (1999).

[84] Liggett, T.M. : *ontinuous time Markov processes : an introduction.* Graduate Studies in Mathemati s., Vol 113, AMS. (2010).

[85] Marra R., Mourragui M. : Phase segregation dynami s for the Blume-Capel model with Ka intera tion. *Stoch. Proc. Appl.* **88**(2000), 79–124.

[86] Mourragui, M. : Limite hydrodynamique d'un pro essus de sauts, de naissan es et de morts. *. R. Acad. Sci. Paris,.* **316**, Série **I**, (1993), 921-924.

[87] Mourragui, M. : Entropie relative et omportement hydrodynamique des pro essus de sauts, de naissan es et de morts. *Ann. Inst. Henri. Poincaré.* **32**, no. 3, (1996), 361-385.

[88] Mourragui, M. Orlandi, E., Saada, E. : Ma ros opi evolution of parti le systems with random field Ka intera tion. *Nonlinearity* **16**, (2003), 2123-2147.

[89] Mourragui M. and Orlandi E. : Large deviations from a ma ros opi s aling limit for parti le systems with Ka intera tion and random potential. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités*, **43**, (2007), 677-715.

[90] Mourragui, M. Orlandi, E. : Latti e gas model in random medium and open boundaries : hydrodynami and relaxation to the steady state. *Journal of Statistical Physics*. Volume 136, (2009), 685-714.

[91] Mourragui, M., Orlandi, E. : Ma ros opi properties and dynami al large deviations of the boundary driven Kawasaki pro ess with long range intera tion. *To be published in Nonlinearity*, **26**, (2013) 141-175.

[92] Orlandi, E., Pi o, P. : Weak large deviations prin iple for one dimensional random field Ka model. *Electron. J. Probab.* 14, (2009), 1372–1416.

[93] Penrose, O., Lebowitz, J.L. : Rigorous treatment of metastable states in the Van der Walls Maxwell theory , *J. Statist. Phys.*, **3**, (1971), 211-236.

[94] Presutti, E. : *Scaling limits in Statistical Mechanics and Microstructures in ontinuumof Mechanics.* Springer. Berlin, Theoreti al and mathemati al Physi s, (2010).

[95] Quastel, J. : Diffusion of olor in the simple ex lusion pro ess, *omm. Pure. Appl. Math,* **XLV**, (1992), 623-679.

[96] Quastel, J., Rezakhanlou, F., Varadhan, S. R. S. : Large deviations for the symmetri simple ex lusion pro ess in dimensions $d \geq 3$, *Probab. Th. Rel. Fields.* **113**, (1999), 1–84.

[97] Rezakhanlou, F. : Hydrodynamic limit for attractive particle systems on Z^d. *Comm. Math. Phys.*, **140**, (1990), 417-448.

[98] Seppalainen, T. : Existence of hydrodynamics for the totally asymmetric simple K-exclusion process. *Ann. Probab.* **27**, (1999), 361–415.

[99] Spitzer, F. : Random process defined through the interaction of an infinite particle system. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, vol 89, (1969), 201–223.

[100] Spitzer, F. : Interaction of Markov Processes, Adv. Math. **5**, (1970), 246–290.

[101] Spohn, H. : *Large Scale Dynamics of Interacting particles.* Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[102] Temam, R. : Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, *North Holland, Amsterdam*, (1984).

[103] Varadhan S.R.S. : Large Deviations and Applications. *CMS- NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics,* **46** (1984).

[104] Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II. in *Asymptotic Problems in Probability Theory : Stochastic Models and Diffusion on Fractals*, edited by K. Elworthy and N. Ikeda, Pitman Research Notes in Mathematics 283, Wiley (1994).

[105] Yau H. T. : Relative entropy and hydrodynamics of Ginsburg-Landau models. *Letters Math. Phys.*. 22, (1991), 63–80.

[106] Yau, H. T. : Metastability of Ginzburg-Landau model with a conservation law, *J. Stat. Phys.* **74**, (1994), 705-742.